CONTRÔLE CONTINU N° 2

Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

1. Soit E un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Que veut dire : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E ? Comment s'écrit un élément $x \in E$ dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

(a) Montrer que l'application définie par

$$(P, Q) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} P(X)Q(X)\,dX, \quad \forall P,\, Q \in E$$

est un produit scalaire (on rappellera brièvement pourquoi les intégrales ont bien un sens).

(b) A partir de la base $(1, X, X^2)$, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (Q_1, Q_2, Q_3) de E.

On considère maintenant l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la même application

$$(P, Q) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} P(X)Q(X)\,dX.$$

Cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On définit $F = \mathrm{vect}(Q_1, Q_2)$ et p_F la projection orthogonale sur F.

(c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner la décomposition de $p_F(P)$ dans la base $\{Q_1, Q_2\}$.

(d) Calculer $p_F(1)$ et $p_F(1 + X^2)$.

(e) Quelles conditions doit satisfaire un polynôme P pour être dans $F^\perp$?

(f) Calculer $(e^{-X^2})'$ et $(e^{-X^2})''$. Commenter brièvement ce résultat et « deviner » un polynôme de degré 3 orthogonal à E.

Quelques rappels

Intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
Croissances comparées $e^{-x^2} = o(|x|^{-n})$, pour tout $n > 0$, en $+\infty$ et en $-\infty$.
Formule d'intégration par partie $\int uv' = [uv] - \int u'v$.
Une intégrale bien définie sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire est nulle.