Corrigé du devoir final

Exercice 1

Donner la limite de la suite dont le terme général est $\int_0^1 \frac{ne^{-x/n}}{n\sqrt{x}+1}\,dx$.

On remarque que pour $x \in]0,1[$, fixé, la suite $n \mapsto \frac{ne^{-x/n}}{n\sqrt{x}+1} = \frac{e^{-x/n}}{\sqrt{x}+1/n}$ est croissante et à valeurs positives et converge vers $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand $n \to \infty$. On peut donc immédiatement appliquer le théorème de convergence monotone qui donne la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^{-x/n}}{n\sqrt{x}+1}\,dx = \int_0^1 \big(\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-x/n}}{n\sqrt{x}+1}\big)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Exercice 2

1. *Montrer que* $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{4-x^2}$ *est intégrable sur* $]0,1[$.

On utilise la définition et des majorations évidentes :

$$\int_{[0,1]} \Big|\frac{\ln x}{4-x^2}\Big|\,dx \leqslant \int_{[0,1]} \Big|\frac{\ln x}{3}\Big|\,dx = -\int_{[0,1]} \frac{\ln x}{3}\,dx = -\frac{1}{3}[x\ln(x)-x]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

On a utilisé la limite bien connue : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.

Sinon, on peut aussi utiliser que l'intégrale généralisée présente uniquement une singularité en 0 et qu'elle est absolument convergente en 0 du fait que $\left|\frac{\ln x}{4-x^2}\right| = o_0(x^{-1/2})$.

2. *Montrer que, sur* $]0,1[$, $f(x) = \ln x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$.

Si $x \in]0,1[$, on peut écrire $\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}}$, et $x^2/4 < 1$. Ainsi, le second terme du produit est limite dune série géométrique, et on obtient en multipliant par $\ln(x)$:

$$\frac{\ln(x)}{4-x^2} = \frac{1}{4}\ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^n = \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}.$$

3. *En déduire que* $\int_0^1 \frac{\ln x}{4-x^2}\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^{n+1}(2n+1)^2}$.

On utilise le théorème de Fubini ($\sum\int = \int\sum$). Comme tout est de signe constant (ici, $\leqslant 0$), il n'y a pas d'hypothèse à vérifier.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \ln(x)\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}\,dx.$$

Pour les intégrales, on fait une IPP :

$$\int_0^1 \ln(x)x^{2n}\,dx = \Big[\frac{1}{2n+1}\ln(x)x^{2n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2n+1}x^{2n}\,dx = -\Big[\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}\Big]_0^1 = -\frac{1}{(2n+1)^2},$$

où l'on a encore utilisé la même limite que dans la première question.

En conclusion,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{4-x^2}\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^{n+1}(2n+1)^2}.$$

Exercice 3

Soit $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. *On considère la fonction* f $2\pi-$*périodique définie sur* $[-\pi,\pi[$ *par* $f(x) = e^{itx}$. *On désignera par* $S(f)$ *la série de Fourier associée à* f *et par* $S_N(f)$ *les sommes partielles de Fourier, pour tout* $N \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$ de la fonction f puis donner l'expression de $S(f)$.*

Par définition, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{itx}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1}{i(t-n)}e^{i(t-n)x}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{(-1)^n}{i(t-n)}(e^{it\pi}-e^{-it\pi}) = \frac{(-1)^n\sin(t\pi)}{\pi(t-n)}.$$

De plus ce calcul est toujours valide car comme $t \notin \mathbb{Z}$ par hypothèse, aucun dénominateur ne s'annule. Enfin, il vient que

$$S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inX} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n\sin(t\pi)}{\pi(t-n)}e^{inX}.$$

2. *Pour tout $x \in [-\pi,\pi[$, déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x)$. A-t-on convergence uniforme de $S_N(f)$? On énoncera précisément les résultats utilisés.*

La fonction f est clairement C^1 par morceaux. On va donc utiliser le théorème de Dirichlet. Si $x \in\,]-\pi,\pi[$, alors f est continue en x et on trouve

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x) = e^{itx}.$$

En $-\pi$, le même théorème (et la périodicité de la fonction) nous permet d'établir :

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(-\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi^+)+f(-\pi^-)\big) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi^+)+f(\pi^-)\big) = \frac{1}{2}\big(e^{-it\pi}+e^{it\pi}\big) = \cos(t\pi).$$

La convergence de la série de Fourier n'est pas uniforme. En effet, la fonction limite n'est pas continue, du fait que $f(-\pi^+) \neq f(-\pi^-) \neq \cos(t\pi)$ (car $t \notin \mathbb{Z}$). S'il y avait convergence uniforme, comme les sommes partielles de Fourier sont continues, la limite le serait aussi (une limite uniforme de fonctions continues est continue).

3. *Donner la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t-n)^2}$.*

Vus les carrés, c'est clairement du Parseval. Ainsi, (et f est dans L^2 car elle est bornée),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |e^{itx}|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\frac{(-1)^n\sin(t\pi)}{\pi(t-n)}\Big|^2.$$

Comme $|e^{itx}| = 1$, on en déduit que

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(t\pi)}{\pi^2(t-n)^2},$$

ou encore

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(t\pi)}.$$

Exercice 4

Soit f une fonction 2π-périodique appartenant à $L^2(]-\pi,\pi[)$. On suppose que $f(\pi+y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Quelles propriétés satisfont les coefficients a_n, pour $n \in \mathbb{N}$ et les coefficients b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$?

On commence par les a_n (il y a un facteur 2 en plus pour a_0 mais ça ne change pas le résultat final) :

$$\begin{aligned}\pi a_n(f) &= \int_{]-\pi,\pi[} f(y)\cos(ny)\,dy = -\int_{]-\pi,\pi[} f(\pi+y)\cos(ny)\,dy \\ &= -\int_{]0,2\pi[} f(z)\cos\big(n(z-\pi)\big)\,dz = (-1)^{n+1}\int_{]-\pi,\pi[} f(z)\cos(nz)dz = (-1)^{n+1}\pi a_n(f).\end{aligned}$$

On en déduit que les coefficients pairs sont nuls : $a_{2n}(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même,

$$\begin{aligned}\pi b_n(f) &= \int_{]-\pi,\pi[} f(y)\sin(ny)\,dy = -\int_{]-\pi,\pi[} f(\pi+y)\sin(ny)\,dy \\ &= -\int_{]0,2\pi[} f(z)\sin\big(n(z-\pi)\big)\,dz = (-1)^{n+1}\int_{]-\pi,\pi[} f(z)\sin(nz)dz = (-1)^{n+1}\pi b_n(f).\end{aligned}$$

On en déduit, comme précédemment, que les coefficients pairs sont nuls : $b_{2n}(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.