Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 — Polytech'Paris
Analyse Hilbertienne – ST3 — Janvier 2013

Devoir final

Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

Exercice 1

Donner la limite de la suite dont le terme général est

$$\int_0^1 \frac{ne^{-x/n}}{n\sqrt{x}+1}\,dx.$$

Exercice 2

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{4-x^2}$ est intégrable sur $]0,1[$.

2. Montrer que, sur $]0,1[$

$$f(x) = \ln x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}.$$

3. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{4-x^2}\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}(2n+1)^2}$$

Exercice 3

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction f $2\pi-$périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(x) = e^{itx}$. On désignera par $S(f)$ la série de Fourier associée à f et par $S_N(f)$ les sommes partielles de Fourier, pour tout $N \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$ de la fonction f puis donner l'expression de $S(f)$.

2. Pour tout $x \in [-\pi,\pi[$, déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x).$$

A-t-on convergence uniforme de $S_N(f)$? On énoncera précisément les résultats utilisés.

3. Donner la valeur de

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t-n)^2}.$$

Exercice 4

Soit f une fonction $2\pi-$périodique appartenant à $L^2(]-\pi,\pi[)$. On suppose que

$$f(\pi+y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Quelles propriétés satisfont les coefficients a_n, pour $n \in \mathbb{N}$ et les coefficients b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$?