Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

Question de cours Soit $f, g \in L^2(]-\pi,\pi[)$. Rappeler la définition du produit de convolution de f et de g et dire à quel espace il appartient.

Exercice 1. Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des quantités suivantes

$$\int_{-1}^{1} e^{-nt^2}\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^n}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \min(1/u, n)\mathrm{d}u.$$

Pour la dernière limite, on pourra tracer le graphe de la fonction à n fixé.

Exercice 2. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale

$$\iint_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{où } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x > y > 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq \pi\right\}.$$

Exercice 3. Soit la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \in]1,\pi]. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de f.

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}.$$

Exercice 4. Soit $\alpha \in]0,1[$ fixé. On définit la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \text{ pour } x \in]-\pi,\pi[.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier complexes de f.

2. Que peut-on dire de la convergence des sommes partielles de la série de Fourier ?

3. En considérant la valeur de la série de Fourier correspondant à f en 0, montrer que

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$