Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

Question de cours Soit $f, g \in L^2(]-\pi, \pi[)$. Rappeler la définition du produit de convolution de f et de g et dire à quel espace il appartient.

Exercice 1. *Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des quantités suivantes*

$$\int_{-1}^{1} e^{-nt^2} \mathrm{d}t,$$

Soit $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = e^{-nt^2}$. Clairement

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall t \in [-1, 1], \quad 0 < f_n(t) \leqslant 1.$$

Or la fonction constante égale à 1 sur $[-1, 1]$ est bien intégrable (c'est l'hypothèse de domination). De plus dès que $t \neq 0$, $-nt^2 \to -\infty$ et $e^{-nt^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc la suite de fonction (f_n) converge presque partout simplement vers 0. On en déduit avec le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} e^{-nt^2} \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} e^{-nt^2} \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 0 \mathrm{d}t = 0.$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x,$$

On va découper ces intégrales en deux morceaux. Regardons d'abord la suite $\int_0^1 \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x$. Si $0 < x < 1$ et $n > 0$ on sait que $0 < x^n < 1$ et donc $|\frac{\sin(x^n)}{x^n}| \leqslant 1$. Comme précédemment, la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, 1]$ (hypothèse de domination). De plus, si $0 < x < 1$, alors $x^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc $\frac{\sin(x^n)}{x^n} \to 1$. Ainsi, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 1 \mathrm{d}x = 1.$$

Considérons maintenant la suite $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x$. Si $n \geqslant 2$ et $x > 1$ on a $|\frac{\sin(x^n)}{x^n}| \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Or, la fonction $\frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ (condition de domination). De plus, si $x > 1$ alors $x^n \to +\infty$ et donc $|\frac{\sin(x^n)}{x^n}| \leqslant \frac{1}{x^n} \to 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui affirme que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0 \mathrm{d}x = 0.$$

En conclusion,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty} \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} \mathrm{d}x = 1.$$

$$\int_{0}^{1} \min(1/u, n) \mathrm{d}u.$$

Soit g_n la fonction définie par $\min(1/u, n)$ sur $]0, 1[$. La fonction g_n est à valeurs positives et vaut donc $1/u$ sur l'intervalle $[1/n, 1[$ et n sur l'intervalle $]0, 1/n[$. La suite (g_n) est croissante et converge simplement vers la fonction $u \mapsto 1/u$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} \min(1/u, n) \mathrm{d}u = \int_{0}^{1} \frac{1}{u} \mathrm{d}u = +\infty.$$

Exercice 2. *Calculer, à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale*

$$\iint_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{où } D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x > y > 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq \pi\right\}.$$

Il faut bien évidemment faire un changement de variable pour passer en coordonnées polaires. On rappelle que ce changement de variable se fait grâce au difféomorphisme $\varphi : (r,\theta) \mapsto \big(x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)\big)$ dont la matrice jacobienne vérifie $\big|\det\big(J\varphi(r,\theta)\big)\big| = r$. De plus l'image réciproque de D est

$$\varphi^{-1}(D) = \left\{(r,\theta) \in]0,\sqrt{\pi}]\times]0,\pi/4[\right\}.$$

On obtient donc avec la formule de changement de variable :

$$\iint_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\varphi^{-1}(D)} r\cos(\theta)\cos(r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \Big(\int_{]0,\sqrt{\pi}]} r^2\cos(r)\mathrm{d}r\Big)\times\Big(\int_{]0,\pi/4]}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\Big).$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{]0,\sqrt{\pi}]} r^2\cos(r)\mathrm{d}r &= \Big[r^2\sin(r)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} - 2\int_{]0,\sqrt{\pi}]} r\sin(r)\mathrm{d}r \\ &= \pi\sin(\sqrt{\pi}) + 2\Big[r\cos(r)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} - 2\int_{]0,\sqrt{\pi}]}\cos(r)\mathrm{d}r \\ &= \pi\sin(\sqrt{\pi}) + 2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}) - 2\sin(\sqrt(\pi)).\end{aligned}$$

La seconde intégrale valant clairement $\sqrt{2}/2$, on conclut que

$$\iint_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\pi\sin(\sqrt{\pi}) + 2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}) - 2\sin(\sqrt{\pi})\Big).$$

Exercice 3. *Soit la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x\in[0,1] \\ 0 \text{ si } x \in]1,\pi]. \end{cases}$$

1. *Déterminer les coefficients de Fourier réels de f.*

La fonction étant paire, les b_n sont tous nuls. On applique ensuite les formules (en utilisant la parité de f) :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,\pi[} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_{]0,\pi[} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}.$$

Pour $n > 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{]-\pi,\pi[} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{]0,\pi[} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{]0,1[}\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\times\frac{\sin(n)}{n}.$$

2. *Montrer que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}.$$

La fonction est bien C^1 sauf en un nombre fini de points, en lesquels f et f' admettent des limites à droite et à gauche. On peut donc appliquer le théorème de Dirichlet en $x = 0$ ce qui donne

$$f(0) = \frac{1}{2} = a_0 + \sum_{n>0} a_n\cos(0\times n) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n>0}\frac{1}{\pi}\times\frac{\sin(n)}{n}.$$

On en déduit bien que

$$\sum_{n>0}\frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi-1}{2}.$$

Appliquons maintenant l'identité de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n>0}|a_n|^2,$$

soit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,\pi[} f(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n>0}\frac{\sin^2(n)}{n^2}.$$

On obtient bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}.$$

Exercice 4. *Soit $\alpha \in]0,1[$ fixé. On définit la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \cos(\alpha x) \text{ pour } x \in]-\pi,\pi[.$$

1. *Déterminer les coefficients de Fourier complexes de f.*

Pour $n = 0$ on a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,\pi[}\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$

Si $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,\pi[}\cos(\alpha x)e^{-inx}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4\pi}\int_{]-\pi,\pi[}(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4i\pi(\alpha-n)}\left[e^{i(\alpha-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4i\pi(\alpha+n)}\left[e^{i(\alpha+n)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin\big((\alpha-n)\pi\big)}{2\pi(\alpha-n)} + \frac{\sin\big((\alpha+n)\pi\big)}{2\pi(\alpha+n)} = \frac{(-1)^n\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}. \end{aligned}$$

2. *Que peut-on dire de la convergence des sommes partielles de la série de Fourier ?*

La fonction f (prolongée par 2π-périodicité) est C^1 sauf en π (modulo 2π) mais du fait que la fonction cosinus est paire, les limites à droite et à gauche de f en π sont égales $\big($et valent $\cos(\alpha\pi) = \cos(-\alpha\pi)\big)$.

Ainsi, on peut conclure du cours que les sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

3. *En considérant la valeur de la série de Fourier correspondant à f en 0, montrer que*

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

En appliquant ce qu'on vient de voir en $x = 0$ (ou d'après Dirichlet) on obtient que

$$f(0) = 1 = c_0 + \sum_{n>0}\Big(c_n e^{in\times 0} + c_{-n}e^{-in\times 0}\Big);$$

ou encore

$$1 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n>0}\Big(\frac{(-1)^n\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} + \frac{(-1)^{-n}\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-(-n)^2)}\Big) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + 2\alpha\sum_{n>0}\frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}.$$

On en déduit immédiatement le résultat demandé.