Interro 4

Exercice 1.
Séries de Fourier

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. On rappelle que le produit scalaire sur $L^2([-\pi, \pi])$ est $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t)\bar{g}(t)dt$.

1. Justifier que $f \in L^2([-\pi, \pi])$.
2. Calculer la norme de f pour le produit scalaire sur $L^2([-\pi, \pi])$ introduit en cours.
3. Calculer la série de Fourier (complexe) de f.
4. Soit $F = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ où $e_k(x) = e^{ikx}$ pour $k = 0, 1, 2$. Déterminer $p_F(f)$ le projeté orthogonal de f sur F.
5. En déduire la valeur de
$$\min \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} |f(t) - ae_0(t) - be_1(t) - ce_2(t)|^2 dt, \quad a, b, c \in \mathbb{C} \right).$$

Exercice 2.
Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des quantités suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx} dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(nx) dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx$

Exercice 3.
Calculer l'intégrale double
$$\int\int_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$
où $\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.