Interro 4

Exercice 1.
Séries de Fourier

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. On rappelle que le produit scalaire sur $L^2([-\pi, \pi])$ est $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\bar{g}(t)dt$.

1. Justifier que $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

   La fonction f est bornée (car continue sur un intervalle borné et fermé) et comme l'intervalle d'intégration est aussi borné, on a bien $\int_{[-\pi,\pi]} f^2 < +\infty$.

2. Calculer la norme de f pour le produit scalaire sur $L^2([-\pi, \pi])$ introduit en cours.

   On rappelle que $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$. Ainsi,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \Big(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\Big)^2 dt = \frac{1}{8\pi}\int_{[-\pi,\pi]} (e^{2t} + 2 + e^{-2t})dt = \frac{1}{8\pi}\Big[\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{8\pi}\big(e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 4\pi\big).$$

3. Calculer la série de Fourier (complexe) de f.

   On commence par calculer les coefficients de Fourier de f : soit $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{e^t + e^{-t}}{2} e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \big(e^{t(1-in)} + e^{-t(1+in)}\big)dt = \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{e^{t(1-in)}}{1-in} - \frac{e^{-t(1+in)}}{1+in}\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{e^{\pi(1-in)} - e^{-\pi(1-in)}}{1-in} - \frac{e^{-\pi(1+in)} - e^{\pi(1+in)}}{1+in}\Big) \\
&= \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{4\pi}\Big(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\Big) = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2(n^2+1)\pi}
\end{aligned}$$

   Où l'on a utilisé que $e^{ni\pi} = e^{-ni\pi} = (-1)^n$.

4. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ où $e_k(x) = e^{ikx}$ pour $k = 0, 1, 2$. Déterminer $p_F(f)$ le projeté orthogonal de f sur F.

   On applique la formule du cours. Le projeté orthogonal est donné par la formule (du fait que (e_0, e_1, e_2) est clairement une base orthonormée de F)

$$p_F(f) = \langle f, e_0\rangle e_0 + \langle f, e_1\rangle e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2 = c_0(f)e_0 + c_1(f)e_1 + c_2(f)e_2 = (e^{\pi} - e^{-\pi})\Big(\frac{1}{2\pi}e_0 - \frac{1}{4\pi}e_1 + \frac{1}{10\pi}e_2\Big).$$

5. En déduire la valeur de

$$\min\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |f(t) - ae_0(t) - be_1(t) - ce_2(t)|^2 dt, \quad a, b, c \in \mathbb{C}\Big).$$

   On reconnaît que ce qu'on doit calculer n'est rien d'autre que $\min(\|f - g\|^2, \quad g \in F)$ et on sait d'après le cours que ce minimum est atteint quand g est le projeté orthogonal de f sur F. On en conclut que

$$\begin{aligned}
\min\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |f(t) - ae_0(t) - be_1(t) - ce_2(t)|^2 dt, \quad a, b, c \in \mathbb{C}\Big) &= \|f - p_F(f)\|^2 \\
&= \|f\|^2 - \|p_F(f)\|^2 = \frac{1}{8\pi}\big(e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 4\pi\big) - \Big(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\Big)^2\Big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}\Big).
\end{aligned}$$

   Où les deus dernières inégalités sont des conséquences de Pythagore et du fait que (e_0, e_1, e_2) est une famille orthonormée.

Exercice 2.
Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des quantités suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx} dx$

   Pour $n \geqslant 1$ on a $|\cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx}| \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-x}$. Or la fonction $g(x) = e^{-x}$ est intégrable : $\int_{[0,+\infty[} g(x)dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.
   De plus, à $x > 0$ fixé on a la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx} = 0$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0.$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(nx) dx$

   On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominé ici, mais pour une fois, on va changer. À $x > 0$ fixé, la suite $\arctan(nx)$ est croissante, à valeurs positives, et converge vers $\pi/2$. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \arctan(nx) dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx$

   On ne regarde que ce qui se passe pour $n \geqslant 2$.
   On rappelle aussi pour commencer que les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x^n)}{x^n}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1.
   Si $x \in]0,1]$ on a, d'après une inégalité bien connue, $|\sin(x^n)| \leqslant x^n$ d'où $\left|\frac{\sin(x^n)}{x^n}\right| \leqslant 1$.
   Pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$ on a alors $\left|\frac{\sin(x^n)}{x^n}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$.
   Soit donc $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ x \in [0,1[; \\ \frac{1}{x^2} \ \text{ si } \ x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

   La fonction g est intégrable que $[0, +\infty[$ (continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable en $+\infty$ par critère de Riemann). Elle vérifie

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \qquad \left|\frac{\sin(x^n)}{x^n}\right|.$$

   C'est l'hypothèse de domination que l'on vient de vérifier.
   Soit maintenant $x \in [0,1[$, alors $x^n \to 0$ et on conclut que $\left|\frac{\sin(x^n)}{x^n}\right| \to 1$. Par ailleurs, si $x > 1$, alors $x^n \to +\infty$ et $\left|\frac{\sin(x^n)}{x^n}\right| \leqslant \frac{1}{x^n} \to 0$.
   Ainsi, par théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = 1.$$

Exercice 3.
Calculer l'intégrale double

$$\int\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$$

où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 < x^2+y^2 \leq 1\right\}.$

Étant donnés la forme du domaine Δ (un quart de cercle) et la fonction (qui fait intervenir $x^2+y^2=r^2$) on fait un changement en coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, et on sait que $\det J(\varphi) = r$ (avec les notations du cours).

Ainsi, en faisant un minimum attention au domaine d'intégration on trouve :

$$\int\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \frac{\pi\ln(2)}{4}.$$