

## INTERRO 2

**Exercice**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. En déduire un polynôme annulateur de  $A$ .
3. Montrer qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .
4. En déduire l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
5. Résoudre le système d'équation suivant :

$$x'(t) = 5x(t) + y(t) + 2z(t) + \cos(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + 7y(t) + 2z(t)$$

$$z'(t) = x(t) + y(t) + 6z(t)$$

avec  $x(0) = 1$  et  $y(0) = z(0) = 0$ .

On pourra rappeler la méthode ou les formules générales avant de se lancer dans les calculs concrets.