Interro 2

Exercice 1.
Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. La règle de Sarrus donne
$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= (5-X)(7-X)(6-X) - 2 + 2 - 2(7-X) - 2(5-X) + (6-X) \\ &= (6-X)\big[(5-X)(7-X) - 3\big] = (6-X)(4-X)(8-X).\end{aligned}$$
Dans le calcul précédent, étant donné l'abondance du terme $(6-X)$ il ne faut surtout pas tout développer !

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est un polynôme anulateur de A.

3. Une telle matrice est telle que ses colonnes sont (dans l'ordre) des vecteurs propres associés aux valeurs propres 4, 6 et 8. Comme χ_A est scindé à racines simples, chaque espace propre est nécessairement de dimension 1. Il suffit à chaque fois de trouver (ou deviner) un unique vecteur propre.
On détermine donc
$$\ker(A - 4I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
et on remarque que le vecteur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en fait parti.
On détermine ensuite
$$\ker(A - 6I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et on remarque que le vecteur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fait parti.
On détermine enfin
$$\ker(A - 4I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
et on remarque que le vecteur $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fait parti.
Une matrice P qui convient est donc
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On doit maintenant inverser P ; on applique l'algorithme standard :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ainsi, on obtient que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^n = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n + 6^n & -6^n + 8^n & -4^n + 8^n \\ 4^n - 6^n & 6^n + 8^n & -4^n + 8^n \\ -4^n + 6^n & 6^n + 8^n & 4^n + 8^n \end{pmatrix}.$$

Tant qu'on y est, vu qu'on va en avoir besoin juste après :

$$\exp(tA) = P\exp\begin{pmatrix} 4t & 0 & 0 \\ 0 & 6t & 0 \\ 0 & 0 & 8t \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{8t} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t} + e^{6t} & -e^{6t} + e^{8t} & -e^{4t} + e^{8t} \\ e^{4t} - e^{6t} & e^{6t} + e^{8t} & -e^{4t} + e^{8t} \\ -e^{4t} + e^{6t} & e^{6t} + e^{8t} & e^{4t} + e^{8t} \end{pmatrix}.$$

5. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} x'(t) &= 5x(t) + y(t) + 2z(t) + \cos(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 7y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + 6z(t) \end{aligned}$$

avec $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.
Ce système est évidemment

$$Y' = AY + B(t), \qquad \text{o} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et condition initiale $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \exp(tA)Y_0$.

La méthode de la variation de la constante donne que la solution de l'équation demandée est

$$\begin{aligned} Y(t) &= \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \exp\big((t-u)A\big)B(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t} + e^{6t} \\ e^{4t} - e^{6t} \\ -e^{4t} + e^{6t} \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (e^{4(t-u)} + e^{6(t-u)})\cos(u) \\ (e^{4(t-u)} - e^{6(t-u)})\cos(u) \\ (-e^{4(t-u)} + e^{6(t-u)})\cos(u) \end{pmatrix}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t} + e^{6t} \\ e^{4t} - e^{6t} \\ -e^{4t} + e^{6t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{-4}{17}(\cos(t) - e^{4t}) + \frac{1}{17}\sin(t) - (\frac{-6}{37}(\cos(t) - e^{6t}) + \frac{1}{37}\sin(t)) \\ \frac{-4}{17}(\cos(t) - e^{4t}) + \frac{1}{17}\sin(t) - (\frac{-6}{37}(\cos(t) - e^{6t}) + \frac{1}{37}\sin(t)) \\ -(\frac{-4}{17}(\cos(t) - e^{4t}) + \frac{1}{17}\sin(t)) + \frac{-6}{37}(\cos(t) - e^{6t}) + \frac{1}{37}\sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$