Interro 3 - Sujet 2

Questions de cours

1. Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner la définition d'une norme.
2. Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 1.
On se place sur $\mathbb{R}^3$ qu'on munit du produit scalaire usuel et on définit les vecteurs :

$$e_1 = (0, -1, 1), \quad e_2 = (1, -5, 1), \quad e_3 = (1, 5, 0).$$

1. Vérifier que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est bien une base.
2. Utiliser la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour trouver la base orthonormée $\{f_1, f_2, f_3\}$ associée à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.
3. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, -3, -1)$ sur $\mathrm{Vect}(f_1, f_3)$.
4. En déduire la valeur de
$$\inf_{v \in \mathrm{Vect}(f_1, f_3)} \|u - v\|.$$

Exercice 2.
Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, on définit $\|P\|_1 = \max_{0 \leq n \leq N} |a_n|$ et $\|P\|_2 = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$.

On admettra que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$.
2. Trouver une suite de polynômes $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ telle que $\|P_N\|_1 = 1$ et $\|P_N\|_2 \to +\infty$.
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?