Interro 3 - Sujet 2

Exercice 1.
On considère les vecteurs :

$$e_1 = (0, -1, 1), \quad e_2 = (1, -5, 1), \quad e_3 = (1, 5, 0).$$

1. OK
2. $$\|e_1\| = \sqrt{2} \text{ donc } f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1).$$

   Pour le calcul de f_2, on a $\langle e_2, f_1 \rangle = 3\sqrt{2}$ et donc

   $$e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1 = (1, -2, -2)$$

   La norme de ce vecteur est égale à 3 donc

   $$f_2 = \frac{1}{3}(1, -2, -2)$$

   Pour le calcul de f_3, on a $\langle e_3, f_1 \rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ et $\langle e_3, f_2 \rangle = -3$ et donc

   $$e_3 - \langle e_3, f_1 \rangle f_1 - \langle e_3, f_2 \rangle f_2 = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

   La norme de ce vecteur est égale à $\frac{3}{\sqrt{2}}$ donc

   $$f_3 = \sqrt{2}(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$$

3. On note $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$.

   $$p_F(u) = \langle u, f_1 \rangle f_1 + \langle u, f_3 \rangle f_3$$

   Or $\langle u, f_1 \rangle = \sqrt{2}$ et $\langle u, f_3 \rangle = 0$. Ainsi

   $$p_F(u) = (0, -1, 1).$$

4. $$\inf_{v \in \mathrm{Vect}(f_1, f_3)} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\| = \|(1, -2, -2)\| = 3$$