Corrigé CC 1

Exercice 1. *Intégrable ou pas ?*

Les fonctions suivantes sont-elles dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$?

$$f_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/5} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

La fonction f_1 est bornée ($|f_1(x)| \leqslant 1$ pour tout x) donc elle est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ par critère de Riemann en $+\infty$ car $3/5 \leqslant 1$. En revanche, elle est dans $L^2(\mathbb{R})$ car $(x^{-3/5})^2 = x^{-6/5}$ est intégrable en $+\infty$, toujours par Riemann ($6/5 > 1$).

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. En effet, en 0, $1/\sin(x) \sim_0 1/x$ qui n'est pas intégrable (Riemann). Ainsi, $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_2(x)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx/|\sin(x)| = +\infty$. Il est alors immédiat que $f_2 \notin L^1(\mathbb{R})$. Enfin, elle n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car en 0, $1/\sin(x)^2 \sim_0 1/x^2$ qui n'est pas non plus intégrable.

Exercice 2. *Distribution ou pas ?*

1. Rappeler la définition d'une distribution.
   Voir cours.
2. Les applications $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ suivantes sont-elles des distributions ?
   (a) $< T, \varphi >= \big(\varphi(3)\big)^3$.
   Ce n'est pas une distribution car elle n'est pas linéaire. En effet,
   $$< T, 2\varphi >= \big(2\varphi(3)\big)^3 = 8\big(\varphi(3)\big)^3 = 8 < T, \varphi >\neq 2 < T, \varphi >,$$
   dès que $< T, \varphi >\neq 0$. Or il est possible de trouver une fonction test vérifiant cette dernière condition (prendre par exemple $\varphi(x) = 1$ sur $[-3, 3]$ et à support dans $[-5, 5]$).
   (b) $< T, \varphi >= \varphi^{(10)}(20)$.
   L'application T est clairement définie sur $\mathcal{D}$ et linéaire par linéarité de la dérivation. Pour la continuité, on prend $N = 10$ et $C = 1$, alors si $\varphi \in \mathcal{D}$, on trouve
   $$| < T, \varphi > | = |\varphi^{(10)}(20)| \leqslant \|\varphi^{(10)}\|_\infty \leqslant 1 \times \sum_{k=0}^{10} \|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$
   On notera qu'ici, ni N ni C ne dépendent de $[a, b]$.