Correction DS 2

Exercice 1. *Dérivées*

1. Calculer les dérivées premières et secondes des distributions suivantes (on commencera par rappeler **succintement** ce que signifie la notation entre crochet et pourquoi on a bien affaire à des distributions et bien sûr, faire des dessins) :
   (a) $[f]$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos(x)|$;
   (b) $[g]$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction 2π-périodique telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.
2. Calculer $\langle [g]'', \varphi \rangle$ où $\varphi \in \mathcal{D}$ est une fonction test, à support dans $[-\pi, \pi]$ et telle que $\varphi(x) = x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Correction. 1. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. En particulier, f est L^1_{loc} et définit donc une distribution $[f]$. De plus, la fonction f' est continue par morceaux et bornée ; elle appartient donc à L^1_{loc}. Il découle donc de la formule des sauts que $[f]' = [f']$ (il n'y a pas de sauts puisque f est continue) avec

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{si } x \in]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[\\ \sin(x) & \text{si } x \in]-\pi/2 + (2k+1)\pi, \pi/2 + (2k+1)\pi[\end{cases}$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

Comme f' est encore C^1 par morceaux, on applique à nouveau la formule des sauts. On calcule que $[f]'' = [f']' = [f''] + \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{\pi/2+k\pi}$, où

$$f''(x) = \begin{cases} -\cos(x) & \text{si } x \in]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[\\ \cos(x) & \text{si } x \in]-\pi/2 + (2k+1)\pi, \pi/2 + (2k+1)\pi[\end{cases}$$

1. (b) La fonction g est C^1 par morceaux, bornée et sa dérivée g' est bornée (en fait constante égale à 1) ; les fonctions g et g' sont donc L^1_{loc} et définissent des distributions auxquelles la formules des sauts s'applique pour donner :

$$[g]' = [1] - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}.$$

On applique à nouveau la formule des sauts pour obtenir :

$$[g]'' = [1'] - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'_{2k\pi} = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'_{2k\pi}.$$

2. D'après la question 1. (b) on a :

$$[g]'' = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'_{2k\pi}$$

et donc

$$\langle [g]'', \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi'(2k\pi) = 2\pi\varphi'(0) = 2\pi,$$

puisque φ' est à support dans $[-\pi, \pi]$ et que $\varphi' = 1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exercice 2. *EDO*

Résoudre au sens des distributions l'équation suivante (on précisera la solution fondamentale) :

$$T'' - 4T' + 2T = \delta_0. \tag{1}$$

Correction. On commence par résoudre l'équation homogène

$$T'' - 4T' + 2T = 0.$$

Les solutions sont les distributions $[y]$ où y est une solution (usuelle) de l'équation $y'' - 4y + 2y = 0$. Pour calculer explicitement ces solutions on résoud d'abord l'équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 2 = 0.$$

On trouve deux solutions distinctes réelles $r = 2 \pm \sqrt{2}$. La solution générale de l'équation $y'' - 4y + 2y = 0$ est donc

$$y(x) = Ae^{(2+\sqrt{2})x} + Be^{(2-\sqrt{2})x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre (1) il nous reste à trouver une solution particulière. On cherche une telle solution sous la forme $[y_0]$ avec

$$y_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ A_0 e^{(2+\sqrt{2})x} + B_0 e^{(2-\sqrt{2})x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

D'après la formule des sauts, on a :

$$[y_0]' = [y_0'] + (A_0 + B_0)\delta_0.$$

Puis

$$y_0'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (2+\sqrt{2})A_0 e^{(2+\sqrt{2})x} + (2-\sqrt{2})B_0 e^{(2-\sqrt{2})x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et, d'après la formule des sauts, on a :

$$[y_0']' = [y_0''] + ((2+\sqrt{2})A_0 + (2-\sqrt{2})B_0)\delta_0.$$

On en conclut que

$$[y_0]'' = [y_0''] + ((2+\sqrt{2})A_0 + (2-\sqrt{2})B_0)\delta_0 + (A_0 + B_0)\delta_0'$$

et donc que l'on a :

$$[y_0]'' - 4[y_0]' + 2[y_0] = \sqrt{2}(A_0 - B_0)\delta_0 - 2(A_0 + B_0)\delta_0 + (A_0 + B_0)\delta_0'.$$

On est donc conduit à résoudre le système d'équations :

$$A_0 + B_0 = 0 \text{ et } \sqrt{2}(A_0 - B_0) = 1.$$

On obtient $A_0 = -B_0 = 1/(2\sqrt{2})$. Finalement la solution générale de (1) est de la forme $[f]$ où

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{(2+\sqrt{2})x} + Be^{(2-\sqrt{2})x} & \text{si } x < 0 \\ (A + \frac{1}{2\sqrt{2}})e^{(2+\sqrt{2})x} + (B - \frac{1}{2\sqrt{2}})e^{(2-\sqrt{2})x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.