UPMC
ROB3 / ST3

Distributions, Fourier, Laplace
2014-2015

Examen : éléments de correction

Exercice 1. *Distributions (3+3+4+2+3+4+2=24)*

1. Rappeler la définition de $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions tests. On précisera bien le sens de chacun des mots importants.
2. Rappeler la définition de $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions. On précisera bien le sens de chacun des mots importants.
3. Soit $f(X) = \sin(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)$. Dessiner le graphe de f et montrer qu'elle induit une distribution $[f]$ dont on rappellera la définition.

   La fonction f est continue par morceaux, elle est bornée, intégrable, donc localement intégrable. Tous ces arguments permettent d'affirmer qu'elle induit une distribution : $[f] : \varphi \mapsto \int f\varphi$.

4. Soit $T \in \mathcal{D}'$. Donner la définition de sa dérivée, la distribution T'.
5. Calculer $[f]'$.

   Vu que f est C^1 par morceaux, on peut appliquer la formule des sauts :

   $$[f]' = [f'] - \delta_{-\pi/2} - \delta_{\pi/2} = [\cos(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)] - \delta_{-\pi/2} - \delta_{\pi/2}.$$

6. Résoudre au sens des distributions l'équation $T'' + T = -(\delta'_{-\pi/2} + \delta'_{\pi/2})$.

   Si on part du principe que les questions ont un rapport les unes avec les autres, on peut être tenté de redériver la fonction précédente. Du fait que la fonction $\cos(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)$ est continue, elle n'a pas de sauts, et la formule des sauts donne alors

   $$[f]" = [\cos(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)]' - \delta'_{-\pi/2} - \delta'_{\pi/2} = -[\sin(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)]' - \delta'_{-\pi/2} - \delta'_{\pi/2}.$$

   On voit donc que f est solution particulière de l'équation.
   Pour trouver l'ensemble des solutions on calcule le polynôme caractéristique : X^2+1 dont les racines sont $\pm i$. Une base des solutions de l'équation homogène est donc (e^{iX}, e^{-iX}) où si l'on veut des fonctions réelles, $\big(\cos(X), \sin(X)\big)$.

Les solutions sont donc (on donne les solutions réelles) $\{[f + a\cos(X) + b\sin(X)], \quad a, b \in \mathbb{R}\}$.

7. La théorie de la transformée de Fourier pourrait-elle être utile pour résoudre simplement cette équation (la réponse est non, on expliquera succinctement pourquoi) ?

   Si on calcule la TF de l'équation on va trouver que la transformée de Fourier F d'une solution f doit vérifier la relation

$$F = -\mathcal{F}(\delta'_{-\pi/2} + \delta'_{\pi/2}) \times \frac{1}{-4\pi^2\xi^2 + 1}.$$

   Or $-4\pi^2\xi^2 + 1$ a des racines réelles, et on a vu en cours que la fonction $\frac{1}{-4\pi^2\xi^2+1}$ n'est pas localement intégrable, la TF n'est alors pas très adaptée pour résoudre l'équation (même si en fait on pourrait s'en sortir).

Exercice 2. *(3+3+4+2+2+4=18)*

1. Rappeler la définition de la classe de Schwartz, $\mathcal{S}$.
2. Rappeler la définition d'une distribution tempérée, $T \in \mathcal{S}'$.
3. Soit $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\delta_n$. Montrer que $T \in \mathcal{S}'$.

   T est clairement linéaire et à valeurs dans $\mathcal{C}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. on veut estimer

$$\begin{aligned}|T(\varphi)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|\varphi(n)| &= |\varphi(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}|n^3\varphi(n)| \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\|X^3\varphi(X)\|_\infty \\ &\leqslant C\sum_{n=0}^{0}\sum_{p=0}^{3} \|X^p\varphi(n)(X)\|_\infty.\end{aligned}$$

   Ci-dessus, on prend $C = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} > 1$. C'est bien la définition de la continuité pour les distributions tempérées, donc $T \in \mathcal{S}'$.

4. Rappeler la définition de la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ puis d'une distribution tempérée.
5. Exprimer simplement T en fonction de la fonction X et du peigne de dirac Ш.

   La fonction X est C^∞ et par définition du produit d'une distribution par une fonction C^∞ on a $T = X\text{Ш}$.

6. Calculer $\mathcal{F}(T)$.

   Par propriétés de la TF, on a $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(X) * \mathcal{F}(\text{Ш}) = \mathcal{F}(X) * \text{Ш}$.
   On sait ensuite que $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$ donc $\mathcal{F}(\delta_0') = 2i\pi X$ d'où finalement

$$\mathcal{F}(X)(\varphi) = \frac{1}{2i\pi}\delta_0'(\mathcal{F}\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi'(0) = -\delta_0'(\varphi).$$

   Donc $\mathcal{F}(T) = -\frac{1}{2i\pi}\delta_0' * \text{Ш} = -\frac{1}{2i\pi}\sum_{n\in\mathcal{Z}}\delta_n'$.

Exercice 3. *(4+3+3=10)*

1. Calculer $h = \chi_{[-1/2,1/2]} * \chi_{[-1,1]}$. On dessinera les graphes des fonctions mises en jeu.

   Par définition, on a

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2,1/2]}(x-t)\chi_{[-1,1]}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2+x,1/2+x]}(t)\chi_{[-1,1]}(t)dt.$$

   On distingue alors des cas :
   — Si $x > 3/2$ ou $x < -3/2$ alors $[-1/2+x, 1/2+x] \cap [-1,1] = \varnothing$ et donc $h(x) = 0$.
   — Si $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$ alors $[-1/2+x, 1/2+x] \subset [-1,1]$ et donc

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2+x,1/2+x]}(t)\chi_{[-1,1]}(t)dt = \int_{[-1/2+x,1/2+x]} dt = 1.$$

   — Si $-3/2 \leqslant x < -1/2$ alors $[-1/2+x, 1/2+x] \cap [-1,1] = [-1, 1/2+x]$ et donc

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2+x,1/2+x]}(t)\chi_{[-1,1]}(t)dt = \int_{[-1,1/2+x]} dt = x + 3/2.$$

   — Si $1/2 \leqslant x < 3/2$ alors $[-1/2+x, 1/2+x] \cap [-1,1] = [-1/2+x, 1]$ et donc

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2+x,1/2+x]}(t)\chi_{[-1,1]}(t)dt = \int_{[-1/2+x,1]} dt = 3/2 - x.$$

2. Soit g définie comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \notin [-3/2, 3/2] \\ x + 3/2 \quad \text{si} \quad x \in [-3/2, -1/2] \\ 1 \quad \text{si} \quad x \in]-1/2, 1/2[\\ 3/2 - x \quad \text{si} \quad x \in [1/2, 3/2] \end{cases}$$

Déterminer $\mathcal{F}(g)$.

On aura reconnu que $g = h$. Par propriété de la TF, on a donc

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(\chi_{[-1/2,1/2]}) \times \mathcal{F}(\chi_{[-1,1]} = \text{sinC}(\pi X) \times 2\,\text{sinC}(2\pi X).$$

3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction du premier exercice

$$f(X) = \sin(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X).$$

Les coefficients de Fourier de $\sin(X) = \frac{1}{2i}(e^{iX} - e^{-iX})$ sont $c_1 = \frac{1}{2i}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2i}$ et tous les autres sont nuls. Par propriétés de la TF, on a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(\sin(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)\big)& \\ &= \mathcal{F}\big(\sin(X)\big) * \mathcal{F}\big(\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)\big) \\ &= \frac{1}{2i}\Big((\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}) * \text{sinC}(\pi X)\Big).\end{aligned}$$

Or par linéarité, et calcule explicite vu au dernier cours, on conclut que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) &= \frac{1}{2i}\Big((\delta_{\frac{1}{2\pi}} * \text{sinC}(\pi X) - \delta_{-\frac{1}{2\pi}} * \text{sinC}(\pi X)\Big) \\ &= \frac{1}{2i}\Big(\text{sinC}\big(\pi(X - \frac{1}{2\pi})\big) - \text{sinC}\big(\pi(X + \frac{1}{2\pi})\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2i}\Big(\text{sinC}\big(\pi X - \frac{1}{2}\big) - \text{sinC}\big(\pi X + \frac{1}{2}\big)\Big).\end{aligned}$$

Rappels :
— $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]}) = 2a\,\text{sinC}(2\pi a X)$,
— $\mathcal{F}(\delta_0) = \mathbb{1}$,
— $\mathcal{F}(T') = 2i\pi X \mathcal{F}(T)$,
— Formule sommatoire de Poisson : $\mathcal{F}(Ш) = Ш$.
— si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique, alors $\mathcal{F}([f]) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\delta_{n/T}$.