UPMC
ROB3 / ST3

Distributions, Fourier, Laplace
2014-2015

Examen

Exercice 1. *Distributions (3+3+4+2+3+4+2=24)*

1. Rappeler la définition de $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions tests. On précisera bien le sens de chacun des mots importants.
2. Rappeler la définition de $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions. On précisera bien le sens de chacun des mots importants.
3. Soit $f(X) = \sin(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X)$. Dessiner le graphe de f et montrer qu'elle induit une distribution $[f]$ dont on rappellera la définition.
4. Soit $T \in \mathcal{D}'$. Donner la définition de sa dérivée, la distribution T'.
5. Calculer $[f]'$.
6. Résoudre au sens des distributions l'équation $T'' + T = -(\delta'_{-\pi/2} + \delta'_{\pi/2})$.
7. La théorie de la transformée de Fourier pourrait-elle être utile pour résoudre simplement cette équation (la réponse est non, on expliquera succinctement pourquoi) ?

Exercice 2. *(3+3+4+2+2+4=18)*

1. Rappeler la définition de la classe de Schwartz, $\mathcal{S}$.
2. Rappeler la définition d'une distribution tempérée, $T \in \mathcal{S}'$.
3. Soit $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\delta_n$. Montrer que $T \in \mathcal{S}'$.
4. Rappeler la définition de la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ puis d'une distribution tempérée.
5. Exprimer simplement T en fonction de la fonction X et du peigne de dirac Ш.
6. Calculer $\mathcal{F}(T)$.

Exercice 3. *(4+3+3=10)*

1. Calculer $h = \chi_{[-1/2,1/2]} * \chi_{[-1,1]}$. On dessinera les graphes des fonctions mises en jeu.

2. Soit g définie comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \notin [-3/2, 3/2] \\ x + 3/2 \quad \text{si} \quad x \in [-3/2, -1/2] \\ 1 \quad \text{si} \quad x \in]-1/2, 1/2[\\ 3/2 - x \quad \text{si} \quad x \in [1/2, 3/2] \end{cases}$$

   Déterminer $\mathcal{F}(g)$.

3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction du premier exercice

$$f(X) = \sin(X)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(X).$$

Rappels :

— $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]}) = 2a\,\mathrm{sinC}(2\pi a X)$,

— $\mathcal{F}(\delta_0) = \mathbb{1}$,

— $\mathcal{F}(T') = 2i\pi X \mathcal{F}(T)$,

— Formule sommatoire de Poisson : $\mathcal{F}(\text{Ш}) = \text{Ш}$.

— si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique, alors $\mathcal{F}([f]) = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\delta_{n/T}$.