

CORRIGÉ CC 1

Exercice 1. *Intégrable ou pas ?*

Les fonctions suivantes sont-elles dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$?

$$f_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^{5/6} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

La fonction f_1 est bornée ($|f_1(x)| \leq 1$ pour tout x) donc elle est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ par critère de Riemann en $+\infty$ car $5/6 \leq 1$. En revanche, elle est dans $L^2(\mathbb{R})$ car $(x^{-5/6})^2 = x^{-10/6}$ est intégrable en $+\infty$, toujours par Riemann ($10/6 > 1$).

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. En effet, en 0, $1/\tan(x) \sim_0 1/x$ qui n'est pas intégrable (Riemann). Ainsi, $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_2(x)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx/|\tan(x)| = +\infty$. Il est alors immédiat que $f_2 \notin L^1(\mathbb{R})$. Enfin, elle n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car en 0, $1/\tan(x)^2 \sim_0 1/x^2$ qui n'est pas non plus intégrable (ou car si elle était dans L^2 elle serait aussi dans L^1_{loc}).

Exercice 2. *Distribution ou pas ?*

- Rappeler la définition d'une distribution.

Voir cours.

- Les applications $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont-elles des distributions ?

(a) $\langle T, \varphi \rangle = (\varphi(1))^2$.

Ce n'est pas une distribution car elle n'est pas linéaire. En effet,

$$\langle T, 2\varphi \rangle = (2\varphi(1))^2 = 4(\varphi(1))^2 = 4 \langle T, \varphi \rangle \neq 2 \langle T, \varphi \rangle,$$

dès que $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$. Or il est possible de trouver une fonction test vérifiant cette dernière condition (prendre par exemple $\varphi(x) = 1$ sur $[-3, 3]$ et à support dans $[-5, 5]$).

(b) $\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(30)}(130)$.

L'application T est clairement définie sur \mathcal{D} et linéaire par linéarité de la dérivation. Pour la continuité, on prend $N = 30$ et $C = 1$, alors si $\varphi \in \mathcal{D}$, on trouve

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\varphi^{(30)}(130)| \leq \|\varphi^{(30)}\|_\infty \leq 1 \times \sum_{k=0}^{30} \|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$

On notera qu'ici, ni N ni C ne dépendent de $[a, b]$.