DS 2

Exercice 1. *Dérivées*

1. Calculer les dérivées premières et secondes de la distribution suivante (on commencera par rappeler **succinctement** ce que signifie la notation entre crochets et pourquoi on a bien affaire à une distribution et bien sûr, faire des dessins) :
   $[f]$, où pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = E(x) - x$ et $E(x)$ désigne la partie entière de x.

2. Déterminer la dérivée au sens des distributions de $[g]$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie presque partout par $g(x) = 1/\sqrt{|x|}$ (on commencera par rappeler **succinctement** ce que signifie la notation entre crochets et pourquoi on a bien affaire à une distribution et bien sûr, faire des dessins). Obtenir une forme qui ne fasse pas intervenir la dérivée de la fonction test.

3. Calculer $\langle [f]'', \varphi \rangle$ où $\varphi \in \mathcal{D}$ est une fonction test, à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\varphi(x) = x$ sur $[-1/2, 1/2]$.

Correction. 1. La fonction $[f]$ est clairement C^1 par morceaux. En particulier, elle est L^1_{loc} et définit donc une distribution $[f]$, définie par $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$.

La fonction partie entière est nulle entre $[0, 1[$ donc sur cet intervalle, $f(x) = -x$. Plus généralement, la partie entière d'un réel est toujours inférieure au réel, donc f est toujours négative. En fait, on re rend assez facilement compte que f est 1-périodique, et donc que la connaître sur $[0, 1[$ suffit à la connaître partout (on recopie sur les intervalles suivants. Ainsi, la fonction, là où elle est dérivable a toujours dérivée -1 et elle effectue un saut de 1 à chaque entier relatif (qui correspond au saut de la fonction partie entière.

La formule des sauts donne donc que $[f]' = [-1] + \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$.

Enfin, la dérivée seconde est ici évidente : $[f]'' = [-1]' + \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta'_k = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta'_k$.

2. La fonction g est continue, sauf en 0 où elle présente une singularité de type critère de Riemann. Comme ici $g(x) = 1/|x|^{1/2}$ les critères de Riemann en 0 permettent d'affirmer que g est intégrable en 0. Ainsi, g est bien L^1_{loc} et définit donc une distribution $[g]$, définie par $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g\varphi$.

Par définition de la dérivée au sens des distributions, la dérivée de $[g]$ est donnée par $[g]' : \varphi \mapsto -\int_{\mathbb{R}} g\varphi'$. Attention cependant, g n'est pas C^1 par morceaux (à cause de la singularité en 0), pour calculer cette dérivée, on va donc procéder comme dans l'exercice sur la valeur principale de $1/x$.

On fixe pour l'instant $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}'$ et on calcule :

$$[g]'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi'(x) \frac{dx}{\sqrt{|x|}} - \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi'(x) \frac{dx}{\sqrt{|x|}}.$$

Estimons la seconde intégrale, quand $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi'(x)\frac{dx}{\sqrt{|x|}}\Big| &\leqslant \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |\varphi'(x)|\frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\
&\leqslant \|\varphi'\|_\infty \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2\|\varphi'\|_\infty \int_{[0,\varepsilon]} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\|\varphi'\|_\infty \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} \to 0.
\end{aligned}$$

Pour la seconde, on va faire des IPP :

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi'(x)\frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= -\int_{]-\infty,-\varepsilon]} \varphi'(x)\frac{dx}{\sqrt{-x}} - \int_{[\varepsilon,+\infty]} \varphi'(x)\frac{dx}{\sqrt{x}} \\
&= -\Big[\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{-x}}\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{]-\infty,-\varepsilon]} \varphi(x)\frac{dx}{2(-x)^{3/2}} \\
&\quad - \Big[\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\Big]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{]\varepsilon,\infty[} \varphi(x)\frac{dx}{2(x)^{3/2}} \\
&= \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{]-\infty,-\varepsilon]} \varphi(x)\frac{dx}{2(-x)^{3/2}} - \int_{]\varepsilon,\infty[} \varphi(x)\frac{dx}{2(x)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Un DL montre que la première fraction tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et on conclut que

$$[g]'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{]-\infty,-\varepsilon]} \varphi(x)\frac{dx}{2(-x)^{3/2}} - \int_{]\varepsilon,\infty[} \varphi(x)\frac{dx}{2(x)^{3/2}}.$$

3. Cette question est beaucoup plus facile que la précédente ! D'après la première question,

$$\langle [f]'', \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k'(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -\varphi'(k).$$

Comme φ est à support dans $[-1,1]$, tous les $-\varphi'(k)$ sont nuls, sauf $-\varphi'(0) = -1$. Ainsi, $\langle [f]'', \varphi\rangle = -1$.

Exercice 2. *EDO*

Résoudre au sens des distributions l'équation suivante (on précisera la solution fondamentale) :

$$T'' + 6T' + 9T = \delta_0.$$

Correction. On commence par résoudre l'équation homogène

$$T'' + 6T' + 9T = 0.$$

Les solutions sont les distributions $[y]$ où y est une solution (usuelle) de l'équation $y''+6y+9 = 0$. Pour calculer explicitement ces solutions on résoud d'abord l'équation caractéristique

$$r^2 + 6r + 9 = 0.$$

On trouve une racine double $r = -3$. La solution générale de l'équation $y''+6y+9y = 0$ est donc

$$y(x) = (Ax+B)e^{-3x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'exercice il nous reste à trouver une solution particulière. On cherche une telle solution sous la forme $[y_0]$ avec

$$y_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (A_0 x + B_0)e^{-3x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

D'après la formule des sauts, on a :

$$[y_0]' = [y_0'] + B_0 \delta_0.$$

Puis

$$y_0'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (A_0 - 3A_0 x - 3B_0)e^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et, d'après la formule des sauts, on a :

$$[y_0']' = [y_0''] + (A_0 - 3B_0)\delta_0.$$

On en conclut que

$$[y_0]'' = [y_0''] + (A_0 - 3B_0)\delta_0 + B_0 \delta_0'$$

et donc que l'on a :

$$[y_0]'' + 6[y_0]' + 9[y_0] = (A_0 - 3B_0)\delta_0 + B_0\delta_0' + 6B_0\delta_0.$$

On est donc conduit à résoudre le système d'équations :

$$B_0 = 0 \text{ et } A_0 - 3B_0 = 1.$$

On obtient $A_0 = 1$ et $B_0 = 0$. Finalement la solution générale est de la forme $[f]$ où

$$f(x) = \begin{cases} (Ax + B)e^{-3x} & \text{si } x < 0 \\ \big((A+1)x + B\big)e^{-3x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Une dernière remarque, on aurait pu deviner que $B_0 = 0$ du fait que les solutions doivent être continues en 0.