Formule sommatoire de Poisson

Soit $F_N(t) = \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=-N}^{N} e^{ikt}$, qui est une fonction localement intégrable. On pose T_N la distribution associée à F_N. Le but de l'exercice est de déterminer la limite (au sens des distributions) de (T_N).

1. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ une fonction à support dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que*
$$\langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}\phi(t)dt,$$
où $\phi(t) = \sum_{n=-M}^{M} \varphi(t+2n\pi)$.

   On commence par donner une expression différente de F_N, en reconnaissant une série géométrique :
$$\begin{aligned}
F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} &= \frac{e^{-iNt}}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{i(k+N)t} = \frac{e^{-iNt}}{2\pi}\sum_{k=0}^{2N} e^{ikt} \\
&= \frac{e^{-iNt}}{2\pi} \times \frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1} \\
&= \frac{e^{-iNt}}{2\pi} \times \frac{e^{i(2N+1)t/2}\big(e^{i(2N+1)t/2} - e^{-i(2N+1)t/2}\big)}{e^{it/2}\big(e^{it/2}-e^{-it/2}\big)} \times \frac{2i}{2i} \\
&= \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, en utilisant ce résultat, la 2π-périodicité de F_N et l'hypothèse sur le support de φ, on obtient :
$$\begin{aligned}
\langle T_N, \varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-(2M+1)\pi,(2M+1)\pi]} \varphi(t)\frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-M}^{M}\int_{[(2n-1)\pi,(2n+1)\pi]} \varphi(t)\frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-M}^{M}\int_{[-\pi,\pi]} \varphi(u+2n\pi)\frac{\sin\big((2N+1)(u+2n\pi)/2\big)}{\sin((u/2n\pi)/2)}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \Big(\sum_{n=-M}^{M}\varphi(u+2n\pi)\Big)\frac{\sin\big((2N+1)u/2\big)}{\sin(u/2)}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}\phi(t)dt..
\end{aligned}$$

2. *En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, où ψ est C^∞, démontrer que T_N converge vers $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi p}$.*
Il faut d'abord écrire ϕ sous la forme requise. C'est un résultat classique appelé lemme d'Hadamard. On va mettre $\phi(t)-\phi(0)$ sous forme intégrale et effectuer un changement de variable ($u = tv$) :

$$\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t \phi'(u)du = \int_0^1 \phi'(tv)tdv = t\psi(t),$$

où on a posé $\psi(t) = \int_0^1 \phi'(tv)dv$. Comme ϕ est C^∞, les théorèmes de dérivations sous l'intégrale permettent de conclure que ψ est bien C^∞ elle-même.
On aura également besoin du résultat suivant :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}dt = \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{ikt}dt = 1.\end{aligned}$$

En effet, dans la dernière expression, la seule intégrale non nulle est celle où $k = 0$.
On a donc d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\langle T_N, \varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}\phi(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}\big(\phi(0) + t\psi(t)\big)dt \\ &= \phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}dt \\ &\qquad + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \times \frac{t}{\sin(t/2)}\psi(t)\sin\big((2N+1)t/2\big)dt \\ &= \phi(0) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \times \frac{t}{\sin(t/2)}\psi(t)\sin\big((2N+1)t/2\big)dt.\end{aligned}$$

On va montrer que l'intégrale de droite tend vers 0 quand $N \to \infty$. Posons $g(t) = \frac{t}{\sin(t/2)}\psi(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. Cette définition n'est pas très jolie pour $t = 0$, mais on peut montrer que g se prolonge en 0 en une fonction C^∞ (ici on n'aura besoin que de C^1). Ainsi l'intégrale devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\big((2N+1)t/2\big)dt.$$

Ça ressemble énormément à un coefficient de Fourier de la fonction g. On peut conclure comme ça, que l'intégrale tend vers 0 quand $N \to \infty$ (souvenez-vous l'analyse hilbertienne, Parseval, lemme de Riemann-Lebesgue les coefficients de Fourier tendent vers 0 !). Sinon, on peut aussi faire une IPP :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\big((2N+1)t/2\big)dt\right| = \\
&\quad \left|\frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{2}{2N+1}g(t)\cos\big((2N+1)t/2\big)\Big] + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{2N+1}g'(t)\cos\big((2N+1)t/2dt\right| \\
&\quad \leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{2}{2N+1}g(t)\cos\big((2N+1)t/2\big)\Big]\right| \times \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{2N+1}g'(t)\cos\big((2N+1)t/2\big)dt\right| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\pi}\frac{2}{2N+1}\|g\|_\infty + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{2N+1}\Big|g'(t)\cos\big((2N+1)t/2\big)\Big|dt \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\pi}\frac{2}{2N+1}\|g\|_\infty + \frac{2}{2N+1}\|g'\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a montré que

$$\langle T_N, \varphi\rangle \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(0) = \sum_{n=-M}^{M}\varphi(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(2n\pi) = \Big\langle \sum_{p\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi p}, \varphi\Big\rangle.$$