Correction TD 3

Exercice 2. *Équations différentielles*

Déterminer les solutions faibles $T \in \mathcal{D}'$ de l'équation différentielle suivante : $T' + aT = \delta_0$, où le coefficient a est la fonction définie par $a(x) = x^3 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction. On commence par déterminer les solutions de l'équation sans second membre : $T' + aT = 0$. On sait que les solutions sont de la forme $[\lambda \exp(x^2/2 - x^4/4)]$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Pour l'équation avec second membre, on cherche les solutions sous la forme $[f]$ où $f(x) = \lambda_- \exp(x^2/2 - x^4/4)$ si $x < 0$ et $f(x) = \lambda_+ \exp(x^2/2 - x^4/4)$ si $x > 0$.

La formule des sauts donne

$$[f]' + a[f] = [f'] + (\lambda_+ - \lambda_-)\delta_0 + a[f] = (\lambda_+ - \lambda_-)\delta_0,$$

du fait que là où f est dérivable, elle est solution de l'équation sans second membre. Ainsi on en déduit que $[f]$ est solution faible de l'équation si et seulement si

$$\lambda_+ - \lambda_- = 1.$$

Exercice 3. *La corde*

L'équation d'équilibre d'un fil élastique de longueur $L > 0$ soumis à une force F est

$$\begin{cases} -[y]'' = \dfrac{1}{k}F, \\ y(0) = y(L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $k > 0$ est une constante qui modélise le matériau élastique constituant le fil et $y(x)$ représente le déplacement vertical au point x du fil attaché en $x = 0$ et $x = L$.

1. On suppose que F est une force de pesanteur constante $g > 0$ dirigée vers le bas, c'est-à-dire que

   $$F = [f], \text{ où } f(x) = -g \text{ pour tout } x \in [0, L].$$

   Calculer la solution y du système (1) correspondant à cette force.

2. On suppose maintenant que F est une charge ponctuelle $p > 0$ en $x = \dfrac{L}{2}$ dirigée vers le bas, c'est-à-dire que

   $$F = -p\, \delta_{\frac{L}{2}}.$$

   Calculer la solution y du système (1) correspondant à cette force.

3. Tracer le graphe représentatif de deux solutions lorsque $k = 1$, $g = 1$, et $p = \int_0^L g\ dx$.

Correction. 1. On commence par résoudre l'équation homogène $-[y]'' = 0$. Une telle solution est de la forme $[y]$ avec $y(x) = Ax + B$ pour certaines constantes réelles A, B. On cherche maintenant une solution particulière sous la forme d'un polynôme. On trouve facilement que $[y_0]$ avec

$$y_0(x) = -\frac{g}{2k}x^2$$

est une solution particulière. La solution générale de l'équation de l'équation $-[y]'' = \frac{1}{k}F$ est donc de la forme $[y]$ avec

$$y(x) = -\frac{g}{2k}x^2 + Ax + B$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. Il reste à ajuster A et B pour que $y(0) = y(L) = 0$. On trouve finalement que l'équation possède une et une seule solution qui est de la forme $[y]$ avec

$$y(x) = -\frac{g}{2k}x^2 + \frac{gL}{2k}x.$$

Le graphe de y est une parabole.

2. On a déjà déterminé les solutions de l'équation homogène. Il nous reste à trouver une solution particulière. On la cherche sous la forme $[y_0]$ avec

$$y_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ A_0x + B_0 & \text{si } x > \frac{L}{2}. \end{cases}$$

La formule des sauts implique alors que l'on a :

$$[y_0]' = [y_0'] + (A_0\frac{L}{2} + B_0)\delta_{\frac{L}{2}}$$

avec

$$y_0'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ A_0 & \text{si } x > \frac{L}{2}. \end{cases}$$

De sorte que la formule des sauts implique que l'on a :

$$[y_0']' = A_0\delta_{\frac{L}{2}}$$

et donc que l'on a :

$$[y_0]'' = A_0\delta_{\frac{L}{2}} + (A_0\frac{L}{2} + B_0)\delta'_{\frac{L}{2}}.$$

Nous sommes ainsi ramenés à résoudre le système d'équations linéaires :

$$A_0 = p \text{ et } A_0\frac{L}{2} + B_0 = 0.$$

On obtient $A_0 = p$ et $B_0 = -\frac{pL}{2}$. La solution générale de l'équation de l'équation $-[y]'' = \frac{1}{k}F$ est donc de la forme $[y]$ avec

$$y(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ (A+p)x + B - \frac{Lp}{2} & \text{si } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. Il reste à ajuster A et B pour que $y(0) = y(L) = 0$. On trouve finalement que l'équation possède une et une seule solution qui est de la forme $[y]$ avec

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{p}{2}x & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ \frac{p}{2}x - \frac{Lp}{2} & \text{si } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

Noter que la fonction y est continue et que son graphe est un V, ce qui est cohérent avec l'intuition physique.

3. À vous de calculer…