Évaluation 1, éléments de correction

Exercice 1.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1.
$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},$$

TD, CV.
Pour la valeur, on commence par faire un changement de variable $u = \frac{2t-a-b}{b-a}$ de telle sorte que l'intégrale devient

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{\frac{b-a}{2}du}{\sqrt{\left[(b-a)(\frac{u+1}{2})\right]\left[(b-a)(\frac{1-u}{2})\right]}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

On fait ensuite un changement de variable en $u = \sin(v)$ ce qui donne

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(v)dv}{\sqrt{1-\sin(v)^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(v)dv}{\cos(v)} = \pi.$$

2.
$$\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)^4}dt,$$

TD, DV

3.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^3}dt,$$

TD, DV

4.
$$\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\big(\cos(1/t)\big)dt,$$

TD, CV

5.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+\ln(t)^2)},$$

La fonction $\frac{1}{X(1+\ln(X)^2)}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc les seules singularités sont en 0 et $+\infty$. En ces deux endroits, on a l'équivalent $\frac{1}{t(1+\ln(t)^2)} \sim \frac{1}{t\ln(t)^2}$.

On a donc affaire à des intégrales de Bertrand, en 0 et en $+\infty$ dont on sait ici qu'elles vont converger. Remontrons-le :

$$\int_2^A \frac{dt}{t\ln(t)^2} = \Big[-\frac{1}{\ln(t)}\Big]_2^A = -\frac{1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)} \longrightarrow \frac{1}{\ln(2)}$$

quand $A \to \infty$.
De manière similaire,

$$\int_A^{0,5} \frac{dt}{t\ln(t)^2} = \Big[-\frac{1}{\ln(t)}\Big]_A^{0,5} = \frac{1}{\ln(A)} - \frac{1}{\ln(0,5)} \longrightarrow -\frac{1}{\ln(0,5)}$$

quand $A \to 0$. Donc l'intégrale converge bien.
On peut aussi voir qu'une primitive de la fonction intégrée est $\arctan\big(\ln(t)\big)$. Ceci permet d'ailleurs de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{t(1+\ln(t)^2)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\arctan\big(\ln(t)\big)\Big]_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\arctan\big(\ln(\varepsilon^{-1})\big) - \arctan\big(\ln(\varepsilon)\big)\Big) = \pi.\end{aligned}$$

6.
$$\int_0^\infty x\exp(-x)dx,$$

La fonction $X\exp(-X)$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$ donc la seule singularité est en $+\infty$. Là on a la relation de comparaison suivante : $\exp(-x) = o(x^{-20})$. Donc $x\exp(-x) = o(x^{-19})$ donc par critère de Riemann et relation de comparaison, l'intégrale converge. Sinon, c'est une fonction qu'on primitive facilement à l'aide d'une IPP.

7.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5\exp(-x)\ln(2x^{64})^{46}}{\arctan(x^2-1)}dx,$$

La fonction $\frac{X^5\exp(-X)\ln(2X^{64})^{46}}{\arctan(X^2-1)}$ est continue sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ donc singularités en 0, 1, et $+\infty$.
En 1 le numérateur est non nul, continu, le dénominateur s'annule. De plus $\arctan(X^2-1)' = 2X/(1+(X^2-1)^2)$ qui est non nul pour $x=1$. Donc d'après le corollaire du cours l'intégrale diverge en 1.

8.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\ln(t)^2}}dt,$$

Singularités en 0 et $+\infty$, ailleurs la fonction $\frac{\sin(X)}{X^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\ln(X)^2}}$ est continue.

En 0 on a l'équivalent $\frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\ln(t)^2}} \sim \frac{t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\ln(t)^2}} \sim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}|\ln(t)|} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, pour t assez petit, donc l'intégrale est convergente par Riemann et théorèmes de comparaison.

En $+\infty$, on majore, pour $t \geqslant 10$ (par exemple)

$$\Big|\frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\ln(t)^2}}\Big| \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Et donc l'intégrale est absolument convergente (et converge).

9.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

Singularités en 0 et $+\infty$. Sinon, $\frac{\cos(X)}{\sqrt{X}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0, $\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ et l'intégrale est convergente par Riemann et théorèmes de comparaison.
En l'infini, l'intégrale n'est pas absolument convergente (cf exemple du cours). Cependant, la fonction $1/\sqrt{X}$ est décroissante, C^1 et tend vers 0 et la fonction $\cos(X)$ possède une primitive bornée, donc l'intégrale converge en $+\infty$.
Sinon, FAIRE UNE INTÉGRATION PAR PARTIE, EXACTEMENT COMME CE QU'ON AVAIT FAIT EN TD JUSTE AVANT !