Corrigé du TD1

Exercice 4.

La première difficulté consiste à comprendre l'énoncé. Regardons ce qui se passe pour des dés normaux. La probabilité pour un dé d'obtenir un résultat donné entre 1 et 6 est alors bien évidemment 1/6. Consignons donc dans un tableau les possibilités quand on jette deux dés :

	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Dans la première ligne on a mis la valeur que prend le premier dé et dans la première colonne la valeur que prend le second dé. On obtient ainsi que (en notant $\mathbb{P}(k)$ la probabilité que la somme des deux dés fasse k) :

$$\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(12) = 1/36, \quad \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(11) = 2/36, \quad \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(10) = 3/36,$$

$$\mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(9) = 4/36, \quad \mathbb{P}(6) = \mathbb{P}(8) = 5/36, \quad \mathbb{P}(7) = 6/36.$$

Si maintenant on pipe les dés, cela veut dire qu'on n'a plus une probabilité uniforme d'1/6 d'obtenir chaque résultat quand on jette un dé. Comme on peut piper les dés comme on le souhaite, on aura même des probabilités différentes pour les deux dés. Donnons leur des noms : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, pour le premier dé, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 pour le second. Ainsi, le tableau précédent devient

	1	2	3	4	5	6
1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	a_5b_1	a_6b_1
2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	a_4b_2	a_5b_2	a_6b_2
3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	a_4b_3	a_5b_3	a_6b_3
4	a_1b_4	a_2b_4	a_3b_4	a_4b_4	a_5b_4	a_6b_4
5	a_1b_5	a_2b_5	a_3b_5	a_4b_5	a_5b_5	a_6b_5
6	a_1b_6	a_2b_6	a_3b_6	a_4b_6	a_5b_6	a_6b_6

En regardant les sommes obtenus on trouve alors les probabilités suivantes (qui correspondent aux sommes des diagonales du tableau) :

$$\mathbb{P}(2) = a_1b_1, \quad \mathbb{P}(3) = a_2b_1 + a_1b_2, \quad \mathbb{P}(4) = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1,$$

$$\mathbb{P}(5) = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1, \quad \mathbb{P}(6) = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 + a_4b_2 + a_5b_1,$$

$$\mathbb{P}(7) = a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 + a_4b_3 + a_5b_2 + a_6b_1,$$

$$\mathbb{P}(8) = a_2b_6 + a_3b_5 + a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2, \quad \mathbb{P}(9) = a_3b_6 + a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3,$$

$$\mathbb{P}(10) = a_4b_6 + a_5b_5 + a_6b_4, \quad \mathbb{P}(11) = a_6b_5 + a_5b_6, \quad \mathbb{P}(12) = a_6b_6.$$

L'exercice demande donc de montrons que ne peut pas trouver des a_k et des b_k qui sont tels que les $\mathbb{P}(k)$ sont tous égaux. Commençons par remarquer que si tous les

$\mathbb{P}(k)$ sont égaux, alors ils valent tous $1/11$ (la somme des probabilités doit faire 1 et la somme des deux dés prend 11 valeurs possibles).

Définissons deux polynômes $P(X) = a_1 + a_2X + a_3x^2 + a_4X^3 + a_5X^4 + a_6X^5$ et $Q(X) = b_1 + b_2X + b_3x^2 + b_4X^3 + b_5X^4 + b_6X^5$. On reconnaît normalement dans les expressions des $\mathbb{P}(k)$ les coefficients du produits des polynômes P et Q. Ainsi, on cherche des probabilités qui vérifient que

$$P \times Q(X) = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} X^k = \frac{1}{11} \times \frac{1 - X^{11}}{1 - X}.$$

Il faut donc justifier pourquoi le polynôme de droite ne peut pas se factoriser comme produit de 2 polynômes à coefficients réels de degré 5. Un argument pour le faire est le suivant.

Si P et Q existent, alors ils ont chacun une racine réelle. En effet, ils sont de degré 5, donc tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$, ou l'inverse. Quoiqu'il en soit, le théorème des valeurs intermédiaires impose qu'il s'annule quelque part sur $\mathbb{R}$. Ainsi le produit PQ doit avoir lui au moins 2 racines réelles (ou une racine double au pire). Mais le polynôme de droite n'admet lui aucune racine réelle, c'est l'absurdité recherchée.

Exercice 7.

1. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx &= \int \Big(\frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|x^2+x+1|\Big] - \frac{3}{2}\Big[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\Big)\Big]\end{aligned}$$

2. $\int_2^3 \cos(x)\exp(x)dx$,
   On fait deux intégrations par partie :

$$\begin{aligned}\int \cos(x)\exp(x)dx &= [\sin(x)\exp(x)] - \int \sin(x)\exp(x)dx \\ &= [\sin(x)\exp(x)] - [-\cos(x)\exp(x)] + \int -\cos(x)\exp(x)dx.\end{aligned}$$

   Donc $\int \cos(x)\exp(x)dx = [\sin(x)\exp(x) + \cos(x)\exp(x)]/2$.

3. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx$, On pose $t = \tan(x/2)$ et on a alors $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dt = \frac{(1+t^2)dx}{2}$. Ainsi, on trouve

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{2dt}{\left(2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{3+2t+t^2}$$
$$= \int \frac{2dt}{(t+1)^2+2} = 2\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\big)\Big]$$
$$= 2\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(\frac{\tan(x/2)+1}{\sqrt{2}}\big)\Big].$$

4. $\int_4^5 (x^2+2x)\exp(x)dx$.
   On reconnaît $\int (x^2+2x)\exp(x)dx = [x^2\exp(x)]$.