Corrigé TD 2 : Intégrales généralisées

Exercice 2. *Récurrence*

On pose pour tout réel $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

1. Montrer par récurrence que les intégrales f_n convergent et établir une formule de récurrence entre $f_{n+1}(a)$ et $f_n(a)$.
2. En déduire la valeur de $f_n(a)$ pour tout n.

L'intégrale généralisée $f_n(a)$ présente uniquement des singularités en $\pm\infty$. En effet, la fonction $(X^2+a^2)^{-n}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or, en ces singularités, on a l'équivalent suivant : $(t^2+a^2)^{-n} \sim t^{-2n}$. Comme n est non nul, $2n > 1$ l'intégrale est absolument convergente, d'après les théorèmes de comparaison et le critère de Riemann en l'infini.

Pour établir la formule de récurrence, on fait une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
f_n(a) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{2} \frac{2t}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt + a^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} \\
&= \left[\frac{t}{2} \times \frac{-1}{n(t^2+a^2)^n}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{n(t^2+a^2)^n} + a^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2n} f_n(a) + a^2 f_{n+1}(a).
\end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$f_{n+1}(a) = \frac{2n-1}{2na^2} f_n(a).$$

De plus on sait que pour $n = 1$, alors

$$f_1(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{|a|} \Big[\arctan\Big(\frac{x}{|a|}\Big) \Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|a|}.$$

Ainsi, on montre facilement par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(a) = \frac{\pi(2n-1)!}{|a|(4a)^{2n-2}\big((n-1)!\big)^2}.$$

Exercice 4. *Fonction périodique / t*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, T périodique. Montrer que l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\int_0^T f(t)dt = 0$.

Supposons dans un premier temps que $\int_0^T f(t)dt = 0$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

La fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0. Elle est donc continue. De plus, d'après l'hypothèse, et par relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_x^{x+T} f(t)dt \\ = \int_0^x f(t-T)dt = \int_0^x f(t)dt = F(x). \end{aligned}$$

La fonction F est donc continue et périodique, donc bornée. La fonction $1/X$ est décroissante, C^1 et tend vers 0. On est exactement sous les hypothèses du théorème d'Abel qui affirme que l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

Traitons maintenant le cas général. On pose $M = T^{-1} \int_0^T f(t)dt$ (M comme moyenne). On laisse vérifier que la fonction $g = f - M$ est encore périodique, de période T, continue, et que maintenant, $\int_0^T g(t)dt = 0$.

D'après l'étude précédente, on sait maintenant que $\int_T^{\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge. Mais

$$\int_T^A \frac{g(t)}{t} dt = \int_T^A \frac{f(t)}{t} dt - \int_T^A \frac{M}{t} dt.$$

Or, d'après le critère de Riemann, la dernière intégrale diverge (quand $A \to +\infty$) dès que $M \neq 0$. Ainsi, si $\int_0^T f(t)dt \neq 0$, l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ diverge.

Exercice 5. *Décroissance et intégrabilité*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable en $+\infty$. Montrer que $f(x) = o_{+\infty}(1/x)$.

Pour résoudre cet exercice, on utilise la même idée que pour montrer que la somme $\sum \frac{1}{k}$ diverge. On regarde l'intégrale sur des tranches bien choisies. Plus précisément, on considère l'estimation suivante :

$$\forall x > 0, \quad \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \geqslant \frac{x}{2} f(x),$$

du fait que f est décroissante. Comme l'intégrale de f converge en ∞, le terme de gauche converge vers 0 et on obtient donc que

$$\lim_{x \to \infty} x f(x) = 0.$$

Ceci veut exactement dire que $f(x) = o_{+\infty}(1/x)$.