CORRIGÉ TD 3 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 3. *Comme pour les fonctions*

Soit u_n une suite décroissante dont la série converge, montrer que $u_n = o(1/n)$.

Comme l'indique le titre, on va procéder de la même manière que pour l'exercice analogue de la feuille de TD précédente. Soit $n > 0$, alors on minore la somme suivante en utilisant la décroissance de la suite et le fait qu'elle est positive :

$$R_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant nu_{2n}.$$

Comme la série converge, les restes tendent vers 0, et on en déduit que $2nu_{2n} \to 0$. Comme la suite est décroissante, on a aussi $2nu_{2n} \geqslant 2nu_{2n+1}$, donc la suite $(2n+1)u_{2n+1} \to 0$ aussi. En conclusion, on a montré que la suite totale $nu_n \to 0$, ce qui veut exactement dire que $u_n = o(1/n)$.

Exercice 4. *Nature de la série de terme général*

6. $\sin(n!\pi e)$.

Pour évaluer la quantité $\sin(n!\pi e)$ il faut voir si $en!$ est prêt d'un entier (auquel cas $\sin(n!\pi e)$ sera petit). On a vu dans le premier TD que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n!}{k!} < en! < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n!}{k!} + \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n!}{k!} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On note $N_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$. On avait déjà vu en TD que N_n est entier (pour montrer que e est irrationnel). Ici, on aura besoin d'un peu plus d'information, à savoir que N_n a la parité de $n+1$. En effet, dans la somme qui définit N_n, si on fait $k = n$ on trouve 1, si on fait $k = n-1$, on obtient n. Tous les autres termes sont ensuite divisibles par $n(n-1)$ qui est pair.

On a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{1}{n+1} = N_n + \frac{1}{n+1}$$

et en réinjectant dans les inégalités ci-dessus, on trouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_n + \frac{1}{n+1} < en! < N_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} < en! - N_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Si on en revient à la série, on a donc en utilisant la croissance du sinus sur $[0,1]$, et la parité de N_n,

$$\sin\big((\frac{1}{n+1})\pi\big) < \sin\big(\pi(en!-N_n)\big) = (-1)^{n+1}\sin(\pi en!) < \sin\big((\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2})\pi\big).$$

Posons $u_n = (-1)^{n+1}\sin\big((\frac{1}{n+1})\pi\big)$ et $v_n = \sin(\pi en!) - (-1)^{n+1}\sin\big((\frac{1}{n+1})\pi\big)$. On a alors $\sin(\pi en!) = u_n + v_n$ et

$$|v_n| < \sin\big((\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2})\pi\big) - \sin\big((\frac{1}{n+1})\pi\big) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}+o\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big).$$

La série de u_n converge d'après le TSSA. De plus, les inégalités précédentes montrent que $v_n = O(1/n^2)$ et donc que la série des v_n converge. Donc la série étudiée converge aussi.

Exercice 5. *CS*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum \frac{1}{1+n^2u_n}$ converge. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

1. Cette première question se traite à l'aide de l'inégalité suivante :
$$2|u_nv_n| \leqslant u_n^2 + v_n^2.$$
Par hypothèse, la série des termes de droite de l'inégalité converge. Par théorème de comparaison (tout ici est positif), la somme des termes de gauche converge aussi. Ainsi, la série $\sum u_nv_n$ est absolument convergente donc convergente.
2. Cette question demande un peu plus d'astuce. On commence par remarquer que comme le terme général d'une série convergente tend vers 0, on a nécessairement $n^2u_n \to +\infty$. En particulier, à partir d'un certain rang, les u_n sont non nuls, et aussi, les suites de termes généraux $1+n^2u_n$ et n^2u_n sont équivalentes (et positives). Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\sum_{TG} \frac{1}{n^2u_n}$ (définie à partir d'un certain rang) converge.
On utilise encore la même inégalité comme suit :
$$\frac{2}{n} = 2\sqrt{\frac{u_n}{n^2u_n}} \leqslant \frac{1}{n^2u_n} + u_n.$$
La série des termes de gauche diverge. La série des termes de gauche de la somme de droite converge, donc nécessairement, la série $\sum_{TG} u_n$ diverge.

Exercice 6. *CSI*

Donner un équivalent de
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On fait une comparaison série intégrale (faire un dessin).

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{n}^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Un calcul explicite donne alors

$$2\big(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}\big) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\big(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\big).$$

Ainsi, par encadrement on trouve que l'équivalent cherché est $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

Exercice 7. *Raabe-Duhamel*

1. Soit u_n une suite à termes positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

   Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \sim An^{-\alpha}$. En déduire la nature de la série des u_n.
2. Étudier la série d'une suite définie par

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. Posons $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. On nous demande de montrer que la suite v_n converge. L'énoncé dit alors (avec un petit DL en prime) que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\Big(\frac{u_{n+1}(n+1)^\alpha}{u_n n^\alpha}\Big) + \ln\Big((1+\frac{1}{n})^\alpha\Big) \\ &= \ln\Big(1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\Big) + \ln\Big(1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\Big) \\ &= -\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

   Il vient donc que la série de terme général $w_k = v_{k+1} - v_k$ converge (par théorème de comparaison et critère de Riemann). Soit B sa limite. En sommant de 0 à n, on trouve que $v_{n+1} - v_0 \to B$. En revenant à la définition de la suite v, on en déduit enfin que $n^\alpha u_n \to \exp(v_0 + B)$, soit encore $u_n \sim An^{-\alpha}$ avec $A = \exp(v_0 + B)$.
   Il vient enfin, d'après le critère de Riemann et les théorèmes de comparaison, que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Pour n assez grand, u_{n+1}/u_n est positif et la suite est donc de signe constant à partir d'un certain rang. Donc, quitte à considérer la suite $-u_n$ à la place du la suite u_n, on va pouvoir appliquer les résultats de la questions précédente. Or un DL donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} = 1 - \frac{b-a}{n+b} = 1 - \frac{b-a}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

On en déduit que la série des u_n converge si et seulement si $b - a > 1$.
Dans ce cas, on utilise la relation $(k+b)u_{k+1} = (k+a)u_k$ qu'on somme entre 0 et n pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1-1+b)u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+a)u_k,$$

ce qui donne après changement d'indice

$$\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + \sum_{k=1}^{n+1}(b-1)u_k = \sum_{k=0}^{n} ku_k + \sum_{k=0}^{n} au_k.$$

Soit après simplification

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{a-b+1}\Big((n+1)u_{n+1} + (1-b)(u_0 - u_{n+1})\Big).$$

Comme $(n+1)u_{n+1} \to 0$ (pourquoi ?) la limite recherchée est donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1-b}{a-b+1}u_0.$$