UPMC
PeiP2 | LM250
2013-2014

TD 4 CORRIGÉ PARTIEL

Exercice 4. *Fonction ζ de Riemann*

Soit $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de ζ. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur ce domaine.*

   Déterminer le domaine de définition de ζ consiste à reconnaître qu'on à affaire à un critère de Riemann pour les séries. La série converge si et seulement si $x > 1$. Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} =]1, +\infty[$.

   Commençons par montrer que la fonction est C^0. À $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $1/n^X$ est positive, décroissante et atteint donc son supremum sur $]1, +\infty[$ en 1 et ce supremum vaut $1/n$. La série de fonction ne converge donc pas normalement sur $]1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann. En revanche on voit que si l'on «coupe» un voisinage de 1, ça marchera mieux.

   Soit donc $\varepsilon > 0$. On a alors comme précédemment $\|1/n^X\|_{\infty,[1+\varepsilon,\infty[} = 1/n^{1+\varepsilon}$. Comme $1 + \varepsilon > 1$ d'après le critère de Riemann la série de fonction des $1/n^X$ converge normalement sur $[1 + \varepsilon, \infty[$. Comme chacune de ces fonctions est continue sur cet intervalle, le théorème de continuité de la somme permet de conclure que ζ est continue sur $[1 + \varepsilon, \infty[$. Comme ce résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction ζ est continue sur la réunion des intervalles de la sorte, à savoir ζ est continue sur $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} [1 + \varepsilon, +\infty[\, = \,]1, +\infty[= \mathcal{D}$.

   On va maintenant montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que ζ est C^k sur $\mathcal{D}$. On commence pour cela par calculer les dérivées successives de $1/n^X$. On a d'abord $(1/n^X)' = \big(\exp\big(-X\ln(n)\big)\big)' = -\ln(n)\exp\big(-X\ln(n)\big) = -\ln(n)/n^X$. Ainsi une récurrence immédiate donne que

   $$\forall k > 0, \quad \left(\frac{1}{n^X}\right)^{(k)} = \frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^X}.$$

   Montrons maintenant par récurrence sur $k \geqslant 0$ que ζ est C^k sur $\mathcal{D}$ avec

   $$\zeta^{(k)}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^X}.$$

   L'initialisation était la continuité.

   Supposons maintenant le résultat vrai pour un certain k. Ainsi, la série

   $$\zeta^{(k)}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^X},$$

converge simplement sur $\mathcal{D}$.

Étudions la convergence normale de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^X}\Big)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\big(-\ln(n)\big)^{k+1}}{n^X}$. Comme pour la continuité, il n'y a aucun espoir de montrer directement qu'il y a convergence normale sur tout le domaine de définition. Introduisons donc un $\varepsilon > 0$. Comme la fonction $\Big|\frac{\big(-\ln(n)\big)^{k+1}}{n^X}\Big| = \frac{\ln(n)^{k+1}}{n^X}$ est décroissante, elle atteint son maximum en $1+\varepsilon$ sur l'intervalle $[1+\varepsilon,+\infty[$. Ainsi,

$$\forall n > 1, \quad \Big\|\frac{\big(-\ln(n)\big)^{k+1}}{n^X}\Big\|_{\infty,[1+\varepsilon,+\infty[} = \frac{\ln(n)^{k+1}}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Par croissance comparée, on sait que $\ln(n) = o_\infty\big(n^{\frac{\varepsilon}{2(k+1)}}\big)$. Ainsi

$$\frac{\ln(n)^{k+1}}{n^{1+\varepsilon}} = o_\infty\Big(\frac{\big(n^{\frac{\varepsilon}{2(k+1)}}\big)^{k+1}}{n^{1+\varepsilon}}\Big) = o_\infty\Big(\frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}\Big).$$

D'après les théorèmes de comparaison et le critère de Riemann, la série de fonction $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^X}\Big)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\big(-\ln(n)\big)^{k+1}}{n^X}$ converge normalement sur $[1+\varepsilon,+\infty[$. On en déduit d'après le théorème de dérivabilité de la somme que ζ est C^{k+1} sur $[1+\varepsilon,+\infty[$ avec

$$\zeta^{(k+1)}(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(-\ln(n)\big)^{k+1}}{n^X},$$

ceci étant vrai sur tous les intervalles de cette forme, c'est vrai sur leur réunion, à savoir $\mathcal{D}$. Ceci conclut la récurrence.

2. *Prouver que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$ *(majorer* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ *par comparaison à une intégrale).*

   Utilisons l'indication. Fixons $x > 0$ pour l'instant.On a par décroissance de la fonction $1/t^x$:
$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^x},$$
   et par somme, quand $x > 1$,
$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^x} = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x} = \Big[\frac{1}{1-x}t^{1-x}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$
   Noter qu'on a supposé ici $x > 1$ pour que sommes et intégrale soient bien définies. Il vient immédiatement que la somme tend vers 0 quand $x \to \infty$. Ainsi, on obtient bien que $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$ (le terme $n = 1$ de la somme).

3. *Prouver que* $\lim\limits_{x\to 1}\zeta(x) = +\infty$.

   Il suffit ici d'utiliser l'autre côté de la comparaison série intégrale :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n^x} \geqslant \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x},$$

et par somme, quand $x > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \Big[\frac{1}{1-x} t^{1-x}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$

Le résultat est alors immédiat.

Exercice 5. *Fonction ζ de Riemann et constante d'Euler*

1. *Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma.$$

L'idée est toujours la comparaison série intégrale. On peut écrire que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big[\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)\Big] \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big[\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt\Big] = 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big[\int_{k-1}^{k} \{\frac{1}{k} - \frac{1}{t}\} dt\Big].\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{-1}{(k-1)^2} \leqslant (k-t) \times \frac{-1}{(k-1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{t} \leqslant 0,$$

en intégrant, il vient que

$$\frac{-1}{(k-1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big) = \int_{k-1}^{k} \{\frac{1}{k} - \frac{1}{t}\} dt \leqslant 0.$$

Ainsi, d'après les théorèmes de comparaison (et critère de Riemann), la série de terme général (négatif) $\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)$ converge, et on peut conclure que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big[\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)\Big]$ converge bien quand $n \to +\infty$.

2. *Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

On veut montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma = \frac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

D'après la question précédente, et par définition de γ, on sait que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)\right] - \left\{1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)\right]\right\} \\
&= - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)\right].
\end{aligned}$$

Pour obtenir ce terme supplémentaire dans le développement asymptotique, il faut pousser un cran plus loin le développement limité de $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{t}$. Ainsi d'après la formule de Taylor–Lagrange, on peut affirmer que

$$\forall t \in [k-1, k],\ \exists c \in [t, k], \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{k} + (t-k) \times \frac{-1}{k^2} + \frac{(t-k)^2}{2!} \times \frac{2}{c^3}.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{-1}{(k-1)^3} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{t} - \frac{t-k}{k^2} \leqslant 0.$$

On intègre ces inégalités entre $k-1$ et k pour obtenir

$$\frac{-1}{(k-1)^3} \leqslant \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) + \frac{1}{2k^2} \leqslant 0.$$

Si l'on somme entre $n+1$ et l'infini ces inégalités il vient que

$$- \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^3} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) \leqslant - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Or toujours par comparaison série intégrale, on vérifie que

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{2t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2n}.$$

On déduit facilement de ces inégalités que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2k^2} = \dfrac{1}{2n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

De même, une dernière CSI donne

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^3} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2(n-1)^2} = o\big(\frac{1}{n}\big).$$

En combinant toutes ces estimations, on conclut bien que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)\right] = \frac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

3. *Montrer que*
$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\Big).$$
Cette égalité ce réécrit, en utilisant les propriétés du logarithme :
$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\Big) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n)\Big).$$
C'est exactement la définition qu'on a donnée de γ dans la première question.

4. *Montrer enfin que*
$$\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}.$$
Utilisons la question précédente en appliquant le fait que ln est DSE et en appliquant le théorème de Fubini sans justification pour commencer :
$$\begin{aligned}\gamma =& 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\Big) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kn^k}\Big)\\ =& 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k} = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k}\\ =& 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\big(\zeta(k) - 1\big).\end{aligned}$$
Ce calcul est légitime, à l'exception de la seconde ligne où l'on a utilisé Fubini sans justification. Mais comme ici tous les termes de la somme sont positifs, il n'y a rien à justifier...