UPMC LM250
PeiP2 2013-2014

TD 5 : correction partielle

Exercice 4. *Sommes*

Après avoir déterminé les rayons de convergence, donner la valeur des séries entières suivantes :

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$.
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)}$.
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n!}\cos(n\theta)$.
- Comme $\frac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, par critère de D'Alembert, on trouve que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$ vaut 1. Pour le calcul on utilise qu'une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ de rayon $R>0$ est dérivable sur $\{x, |x|<R\}$ et qua sa dérivée est une série entière de même rayon de convergence donnée par $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n)' = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}x^n$.

  En particulier, on en déduit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(n+1)x^n = \Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n\Big)'$. Il suit que

  $$\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n = \big((1-x)^{-1}\big)' - \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = (1-x)^{-2} - (1-x)^{-1} \quad \text{pour} \quad |x|<1.$$

  On peut alors dériver à nouveau l'égalité précédente pour obtenir :

  $$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)^2x^n \quad &= x^{-1}\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)^2x^{n+1} \\ &= 2(1-x)^{-3} - (1-x)^{-2}\end{aligned}$$

  soit après changement d'indice

  $$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n = x\Big[2(1-x)^{-3} - (1-x)^{-2}\Big].$$

  pour tout $|x|<1$.
- Comme $\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, par critère de D'Alembert, on trouve que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)}$ vaut 1.

  Pour le calcul, on fait une décomposition en éléments simples : $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big)$. Notons que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ a aussi un rayon de convergence égal à 1. On a alors, pour tout $|x|<1$, l'identité :

  $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n+2}\Big)$$

car toutes les séries en question sont absolument convergentes. On utilise alors que le développement en série entière[1] du logarithme :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} = -\ln(1-x).$$

De même $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x^2}\Big(-x-\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{n}\Big)$. On conclut finalement que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(-\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big).$$

– D'après la majoration $|\cos| \leqslant 1$, on déduit que le rayon de convergence est le même que celui de l'exponentielle, c'est-à-dire $+\infty$. En effet, si $r>0$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{n!}$ converge, et par principe de comparaison, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{n!}\cos(n\theta)$ converge absolument.
  Pour calculer la valeur de cette série entière, on utilise la formule d'Euler : $\cos(n\theta) = \Re\left(e^{in\theta}\right)$ donc si $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}\cos(n\theta) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}\Re\left(e^{in\theta}\right)\\ &= \Re\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n!}\right) = \Re\left(e^{xe^{i\theta}}\right) = \Re\left(e^{x(\cos(\theta)+i\sin(\theta))}\right)\\ &= e^{x\cos(\theta)}\cos\big(x\sin(\theta)\big).\end{aligned}$$

Exercice 5. *DSE*

Montrer que la fonction $\big(\arcsin(X)\big)^2$ est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer les coefficients.

On commence par montrer que la fonction $Y(X) = \big(\arcsin(X)\big)^2$ est développable en série entière. Tout d'abord la fonction $\arcsin(X)$ qui est bien développable en série entière car sa dérivée, $(1-X^2)^{-1/2}$ est développable en série entière avec rayon de convergence 1 (cours) et qu'une primitive d'une série entière (ici la primitive qui s'annule en 0) est développable en série entière avec même rayon de convergence. Donc $\arcsin(X)$ est développable en série entière avec rayon de convergence 1. On sait maintenant que Y est développable en série entière avec rayon de convergence au moins 1, comme produit de 2 fonctions développables en série entière.

Pour calculer, on utilise la méthode de l'équation différentielle. On dérive pour obtenir $Y' = 2\arcsin(X)(1-X^2)^{-1/2}$, soit encore $(1-X^2)(Y')^2 = 4Y$. On redérive cette égalité pour obtenir que $-2X(Y')^2 + (1-X^2)2Y'Y'' = 4Y'$ soit après simplification par $2Y'$:

$$-XY' + (1-X^2)Y'' = 2.$$

1. on peut aussi le déduire du fait que la dérivée de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{n}$ est la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x^n = (1-x)^{-1}$ puis intégrer.

On note maintenant $\sum a_n X^n$ le DSE de Y et on remplace dans l'égalité précédente (les calculs sont valables dans le disque ouvert de convergence d'après les résultats du cours) :

$$\begin{aligned}
2 &= -XY' + (1-X^2)Y'' = -X\sum_{n\geqslant 1} n a_n X^{n-1} + (1-X^2)\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n X^{n-2} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} -n a_n X^n + \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n X^{n-2} - \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n X^n \\
&= \sum_{n\geqslant 1} -n a_n X^n + \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1)a_{n+2} X^n + \sum_{n\geqslant 2} -n(n-1)a_n X^n \\
&= -a_1 X + 2a_2 + 6a_3 X + \\
&\quad + \sum_{n\geqslant 2} \big(-n a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n \big) X^n \\
&= 2a_2 + (-a_1 + 6a_3)X + \\
&\quad + \sum_{n\geqslant 2} \big(-n a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n \big) X^n.
\end{aligned}$$

On en déduit les relations de récurrence (par identification des coefficients de cette série entière avec la série entière constante égale à 2) : $2a_2 = 2$, $-a_1 + 6a_3 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n^2 a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Pour les conditions initiales, on sait que $a_0 = Y(0) = \arcsin(0)^2 = 0$ et que $a_1 = Y'(0) = 2\arcsin(0)(1-0^2)^{-1/2} = 0$. Enfin, la résolution de la suite récurrente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}{(2n)!}.$$

Au pire, si vous ne trouvez pas cette formule, vérifier par récurrence qu'elle convient.