Interrogation écrite III : corrigé

Exercice 1.

Déterminer le rayon de convergence

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!}$;

   on peut reconnaître dans le formule ci-dessus $\cos(z^2)$ qui converge pour tout z. Le rayon de convergence est donc infini.

   Sinon on pose $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!}$. On applique d'Alembert. Du fait que $\frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$, f a un rayon de convergence infini. Comme notre série entière est $f(z^4)$ elle a aussi un rayon de convergence infini d'après le cours.
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n} z^{2n}$;

   On pose $h(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n} z^n$ et on applique d'Alembert : $\frac{3^n}{3^{n+1}} = 1/3 \to 1/3$. Donc h a un rayon de convergence égal à 3. Comme la série entière qu'on étudie est $h(z^2)$ son rayon de convergence est $\sqrt{3}$.
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^{n^2}}{(2n)!} z^n$. Ici on peut appliquer d'Alembert directement, mais sans faire d'erreur de calcul !

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{n^{n^2}} &= \frac{(n+1)^{n^2} \times (n+1)^{2n+1}}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{n^{n^2}} \\ &= \frac{(1+1/n)^{n^2}}{(2n+1)(2n+2)} \times (n+1)^{2n+1} \geqslant \frac{(n+1)^{2n-1}}{4}.\end{aligned}$$

   donc ce quotient tend clairement vers $+\infty$ et le rayon de convergence est 0.
4. Calculer la somme des deux premières séries entières (pour $z \in]-R, R[$).
   On a déjà dit pour la première, c'est $\cos(z^2)$. Pour la seconde :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n} z^{2n} = \sum_{n\geqslant 0} (z^2/3)^n = \frac{1}{1-z^2/3}.$$

5. Bonus : Quel est le domaine de convergence (dans $\mathbb{R}$) des deux premières séries entières ?

Pour la première, comme $R = +\infty$ le domaine de convergence est $\mathbb{R}$ tout entier, il n'y a rien à faire.

Pour la seconde, on remarque que grace au carré, le calcul sera le même en $\sqrt{3}$ et en $-\sqrt{3}$:

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}(\pm\sqrt{3})^{2n} = \sum_{n\geqslant 0} 1.$$

La série diverge grossièrement, le domaine de convergence est donc $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

Exercice 2.

Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n>0} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{n^3+x^2}}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n>0} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   À x fixé, tout est positif et on a l'équivalent (quand $n \to +\infty$) $f_n(x) \equiv \frac{x^2}{\sqrt{n^3}} = \frac{x^2}{n^{3/2}}$ et la série converge par Riemann ($3/2 > 1$) et critère de comparaison.

2. Montrer que la série dérivée $\sum\limits_{n>0} f_n'(x)$ ne converge *pas* normalement sur $[0, +\infty[$, mais converge normalement sur tout intervalle $[0, A[$ avec $A > 0$.

   Il faut calculer cette dérivée pour commencer :

$$f_n'(x) = \frac{2x(n^3+x^2)^{1/2} - x^2(n^3+x^2)^{-1/2}x}{n^3+x^2} = \frac{2xn^3+x^3}{(n^3+x^2)^{3/2}}.$$

   On peut calculer la dérivée seconde pour calculer le sup, mais ici (sans être infaisable) c'est un peu pénible. On peut deviner une suite de points x_n tel que $\sum f_n'(x_n)$ diverge. Heureusement, il y a plein de choix de x_n qui marchent : n, $\sqrt{n}$, $n^{2/3}$, ou encore mieux, on peut remarquer que la limite de f_n' en $+\infty$ existe et vaut 1. Ainsi, $\sup(|f_n'(x)|) \geqslant 1$ et la série des f_n' n'a aucune chance de converger normalement.

   Si on se restreint à un intervalle $[0, A[$ alors on peut majorer f_n' (en majorant le numérateur et <u>minorant</u> le dénominateur) :

$$\forall x \in [0, A[, \quad |f_n'(x)| \leqslant \frac{2An^3 + A^3}{(n^3)^{3/2}} \equiv \frac{2An^3}{n^{9/2}} = \frac{2A}{n^{3/2}}.$$

   Donc par Riemann et théorème de comparaison, la série des f_n' CVN sur $[0, A[$.

3. Montrer que la somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

   Comme la série des f_n converge simplement sur $[0, A[$ (question 1) que les f_n sont dérivables et que la série des dérivées CVN sur $[0, A[$, par théorème de dérivabilité des séries, $\sum f_n$ est dérivable sur $[0, A[$ et $(\sum f_n)' = \sum f_n'$. De plus comme les f_n' sont clairement continues, par théorème de continuité des séries de fonctions (appliqué à $\sum f_n'$), la série $\sum f_n'$ est continue sur $[0, A[$.

   Ceci étant vrai pour tout intervalle du type $[0, A[$, par principe de localisation, c'est vrai sur leur réunion, à savoir $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$. Soit $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une fonction DSE de rayon $R > 0$ qui est solution de l'équation différentielle.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

On rappelle qu'à l'intérieur du disque ouvert de rayon le rayon de convergence, S est C^∞ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}.$$

Ainsi (E) devient

$$\begin{aligned} 0 &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(4n(n+1) a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n\big) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sachant que le rayon est non nul), on déduit que tous les coefficients doivent être nuls ci-dessus, soit

$$\forall n > 0, \quad 4n(n+1) a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n = 0,$$

ce qui équivaut au résultat demandé.

2. En déduire une expression de a_n pour tout $n > 0$.
On montre facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{a_0}{(2n)!}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Si $a_0 = 0$ toute la suite est nulle et le rayon de convergence est infini. Sinon, on peut appliquer d'Alembert et on trouve encore que $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$ et donc que $R = +\infty$.

4. Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Montrer que φ est DSE et coïncide avec l'une des fonctions trouvées à la première question. En déduire qu'elle est solution de l'équation différentielle (E).

Si $x > 0$ on calcule

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

De même, si $x < 0$ on obtient

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Comme les deux formules obtenues sont les mêmes (et sont aussi valides en 0) la fonction φ est bien DSE. On reconnaît les coefficients a_n quand $a_0 = 1$. Ainsi, φ est solution de (E).

5. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) qui sont DSE au voisinage de 0.

   Les solutions de (E) qui sont DSE sont donc exactement de la forme $a_0\varphi$.