LM 250 **Examen** **09-01-2014**

Ni documents, ni calculatrice, ni téléphone portable

Exercice n°1 **3 – 6 – 6 – 10 – 10**

On note $\zeta(2) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S = \zeta(2) - 1 = \sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Montrer les assertions suivantes:

1/ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 - 1/4}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\left(n^2 - 1/4\right)^2}$ convergent.

2/ $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1/4} = \frac{2}{3}$.

3/ $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \times \zeta(2)$.

4/ $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{\left(n^2 - 1/4\right)^2} = 6S - \frac{34}{9}$.

5/ En admettant que $\frac{15}{16}\sum_2^{+\infty} \frac{1}{\left(n^2 - 1/4\right)^2} \leq 4\sum_2^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2 - 1/4} - \frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_2^{+\infty} \frac{1}{\left(n^2 - 1/4\right)^2}$,

montrer que $\frac{29}{45} \leq S \leq \frac{149}{231}$ soit $\left(0.644444 \leq S \leq 0.645021...\right)$ $\Big($Utiliser 4/ et 2/.$\Big)$

Exercice n°2 **10 – 3 – 3 – 3**.

Soit l'équation différentielle $3(1+x)y' + y = 0$ (E).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RCV $R > 0$ telle que $a_0 = 1$ et

$x \longmapsto S(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) dans un intervalle $]-A, A[$.

1/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3(n+1)a_{n+1} + (3n+1)a_n = 0$.

2/ Montrer que $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

3/ Montrer que pour toute solution y de (E) la fonction $x \longmapsto (1+x)^{1/3} y(x)$ est constante.

4/ En déduire que $S(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/3}}$ pour $|x| < 1$.

Exercice n°3 **10 – 3 – 10**

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ la série de fonctions définies sur $[0,1]$ par $u_n(x) = \frac{x^n \ln x}{n}$.

1/ Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$. $\left(\text{Calculer } \sup_{0<x<1} \left|u_n(x)\right|\right)$

2/ Vérifier que $\int_0^1 t^n \ln(t)\, dt = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

3/ Montrer que $\int_0^1 (\ln t)\big(\ln(1-t)\big)dt = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Voir au dos

RAPPELS DE COURS

Séries numériques

Critère de Riemann : *Soit* $\sum u_n$ *une série. S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $u_n \underset{+\infty}{=} O(1/n^\alpha)$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*

Séries de fonctions

Définition: Soit $\sum u_n$ une **série de fonctions** définies sur un intervalle I. Elle converge **normalement** sur I s'il existe une **série majorante** $\sum m_n$ convergente telle que

$$\forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in I, \ \left|u_n(x)\right| \leq m_n \qquad \Big(\text{ou encore } \sup_{a<x<b} \left|u_n(x)\right| \leq m_n\Big).$$

Théorème de Fubini. *Soit* $\sum u_n$ *une série de fonctions continues sur un intervalle* $]a, b[$ *borné. Si* $\sum u_n$ *converge normalement sur* $]a, b[$ *, alors* $\sum \left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right)$ *converge. De plus*

$$\int_a^b \left(\sum_0^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_0^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right).$$

Séries entières

Règle de d'Alembert. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière et* R *son rayon de convergence. On suppose que* $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *existe. Alors* $R = \dfrac{1}{L}$.

Série dérivée. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Alors sa somme* $S(z) = \sum\limits_0^{+\infty} a_n z^n$ *est définie et* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $D(0, R)$. *De plus, pour* $|z| < R$, $S'(z) = \sum\limits_0^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

FORMULAIRE ET RÉSUTATS ANNEXES

Fractions rationnelles

$$\frac{1}{n^2 - 1/4} = \frac{1}{n - 1/2} - \frac{1}{n + 1/2}.$$

$$\frac{1}{\left(n^2 - 1/4\right)^2} = \frac{4}{\left(2n - 1\right)^2} + \frac{4}{\left(2n + 1\right)^2} - \frac{2}{n^2 - 1/4}.$$

Développement en série entière

$$\forall |x| < 1, \qquad \ln(1 - x) = -\sum_1^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Définition: Une série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ est **téléscopique** si son terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = x_n - x_{n-1}$. Si la suite x_n converge, $\sum u_n$ converge aussi et $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n - x_{n_0-1}$.

Pair Impair Soit $\sum\limits_{n=1} u_n$ une série absolument convergente. Alors $\sum\limits_1^{+\infty} u_n = \sum\limits_1^{+\infty} u_{2n-1} + \sum\limits_1^{+\infty} u_{2n}$.