Exercice n°1 **7 – 7 – 8**

Montrer que les séries suivantes convergent :

$$1/\ \sum \frac{1}{n(\ln n)^2} \qquad 2/\ \sum \frac{n!(2n)!}{(3n)!}6^n \qquad 3/\ \sum \frac{e^{in}}{\sqrt{n}}$$

Exercice n°2 **4 – 3 – 5 – 8 – 4**

Soit $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $F(x) = e^{\arctan x}$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\big(a_n - (n-1)a_{n-1}\big).$$

1/ Montrer que, sur $]-1,1[$, F est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' - y = 0, \qquad y(0) = 1. \qquad (E)$$

2/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq 1$.

3/ Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq 1$.

On définit $S :]-1,1[\longmapsto \mathbb{R}$ en posant $S(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$.

4/ Montrer que S est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle (E).

5/ Calculer $F^{(5)}(0)$.

Exercice n°3 **8 – 5 – 5 – 2 – 8 – 6**

On note $J = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\, du$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi,\pi]$.

1/ En utilisant f, montrer que $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2/ Montrer que J converge.

3/ Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $J = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 u^k \ln u\, du\right) + \int_0^1 \frac{u^{n+1}\ln u}{1-u}\, du$.

4/ Montrer que la fonction $g : u \longmapsto \frac{u \ln u}{1-u}$ définie sur $]0,1[$ est bornée sur $]0,1[$.

5/ Montrer que $J = \sum_0^{+\infty} \left(\int_0^1 u^k \ln u\, du\right)$.

6/ Calculer J.

Voir au dos

Formules et Rappels

Fonctions trigo

$\cos' x = -\sin x \qquad \sin' x = \cos x \qquad \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + \mathrm{C}$

$e^{i\pi} = -1, \qquad e^{in\pi} = \cos(n\pi) = (-1)^n$

Série géométriques

Pour $|z| < 1$, $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_0^{+\infty} z^n$. Pour $z \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z-z^{n+1}}{1-z}$.

Equivalents

En 1 $\quad \ln x \sim x - 1$.

Comparaison Séries Intégrales. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f : [k, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante. Alors* $\displaystyle\sum f(n)$ *et* $\displaystyle\int_k^{+\infty} f(t)\,dt$ *sont de même nature.*

Critère de d'Alembert. *Soit $\sum u_n$ une série. On suppose que $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe et que $L \neq 1$. Alors* $\quad L < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *CV* $\quad$ *et* $\quad L > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *DV.*

Critère d'Abel monotone (CAM). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que*

1/ La suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée,* $\quad$ *2/ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone,* $\quad$ *3/* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Alors $\sum u_n v_n$ est convergente.

Séries entières Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si elle converge pour $|z| < A$ où $A > 0$, alors son rayon de convergence R vérifie $R \geq A$.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors sa somme $S(z) = \displaystyle\sum_0^{+\infty} a_n z^n$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$. De plus, pour $|z| < R$, $S'(z) = \displaystyle\sum_0^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Enfin pour tout n, $S^{(n)}(0) = n! \times a_n$.

Cœfficients de Fourier Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi[$. Les cœfficients de Fourier de f sont définis en posant

– pour $n = 0$, $a_0 = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$,

– pour $n > 0$, $a_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $\quad$ et $\quad b_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Identité de Parseval Si f est 2π-périodique continue par morceaux, alors

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)\right|^2 dx.$$