Exercice n°1

1/ La fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est décroissante. Par le CSI il suffit de montrer la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. Soit $A > 2$. En posant $u = \ln x$, on a $\displaystyle\int_2^A \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A}$. En prenant $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}$ on obtient la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, d'où celle de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

2/ Appliquons le critère de D'Alembert. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}6^{n+1} \times \frac{(3n)!}{n!(2n)!6^n} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)\times 6}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\times 2\times 6}{3^3} = \frac{24}{27} < 1$. D'où la convergence de $\displaystyle\sum \frac{n!(2n)!}{(3n)!}6^n$.

3/ Appliquons le critère d'Abel avec $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = e^{in}$. La suite $n \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroît et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Pour les sommes partielles on a $\displaystyle\left|\sum_1^n e^{ik}\right| = \left|\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right| \leq \frac{2}{|1-e^i|}$. Elles sont donc uniformément bornées. Le critère d'Abel s'applique et donne la convergence de $\displaystyle\sum \frac{e^{in}}{\sqrt{n}}$.

Exercice n°2

1/ Une solution y de (E) vérifie $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{1+x^2}$, soit $\ln|y| = \arctan x + \mathrm{C}$. La condition $y(0) = 1$ implique $\mathrm{C} = 0$. De plus $\ln|y|$ est continue. Donc y reste de signe constant i.e. y reste positive et $|y| = y$. Finalement $\ln y = \arctan x$, soit $y = F$.

2/ Procédons par récurrence. Comme $a_0 = a_1 = 1$, l'initialisation est faite. Pour $n \geq 1$,

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}|a_n - (n-1)a_{n-1}| \leq \frac{|a_n| + (n-1)|a_{n-1}|}{n+1} \leq \frac{1+(n-1)}{n+1} \leq 1.$$

3/ Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leq |z|^n$. Or si $|z| < 1$ la série $\sum |z|^n$ converge et, d'après 1/, $\sum a_n z^n$ converge aussi par comparaison. Donc $R \geq 1$.

4/ D'après 3/, S est dérivable sur]-1,1[et $\displaystyle S'(x) = \sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. On a donc, pour $x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned}(1+x^2)S'(x) - S(x) &= \sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+2} - \sum_0^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_2^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_0^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_1 - a_0 + (2a_2 - a_1)x + \sum_2^{+\infty}\Big((n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} - a_n\Big)x^n.\end{aligned}$$

On a $a_1 - a_0 = 0$ et $a_2 = \dfrac{a_1 - 0 \times a_0}{2} = \dfrac{1}{2}$ d'où $2a_2 - a_1 = 0$. La relation sur les a_n's entraîne que $(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} - a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. Donc S est solution de (E) sur $]-1,1[$.

5/ D'après 1/ et 4/, $\forall x \in]-1,1[$, $F(x) = S(x)$. D'où $F^{(5)}(0) = S^{(5)}(0) = 5! \times a_5$.

On a $\quad a_3 = \dfrac{1/2 - 1 \times 1}{3} = \dfrac{-1}{6}, \qquad a_4 = \dfrac{-1/6 - 2 \times 1/2}{4} = \dfrac{-7/6}{4} = \dfrac{-7}{24}.$

Enfin $\quad a_5 = \dfrac{-7/24 - 3 \times (-1/6)}{5} = \dfrac{-7/24 + 12/24}{5} = \dfrac{1}{24}.$

Finalement $F^{(5)}(0) = 5! \times \dfrac{1}{24} = \dfrac{120}{24} = 5$.

Exercice n°3

1/ La fonction f étant impaire sur $]-\pi,\pi[$ on calcule les b_n au moyen d'une IPP.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\ dx = \frac{-x\cos(nx)}{n\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\ dx.$$

Comme $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\ dx = 0$ pour $n \geq 1$, il reste $b_n = \dfrac{-\pi(-1)^n - \big(-(-\pi)\big)(-1)^n}{n\pi} = \dfrac{-2(-1)^n}{n}$.

Parseval donne $\quad \displaystyle\frac{1}{2} \times \sum_{1}^{+\infty}|b_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\ dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$

Finalement $\quad \displaystyle\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{1}^{+\infty}|b_n|^2 = \frac{\pi^2}{6}.$

2/ L'intégrale J présente une singularité en 0 et peut être en 1. Comme $\ln u = O(u^{-1/2})$ en 0^+, J converge en 0 d'après Riemann. En 1, $\dfrac{\ln u}{1-u} \sim -1$ et il n'y a pas de singularité.

3/ Comme pour $u \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{n}u^k + \frac{u^{n+1}}{1-u}$ par linéarité on a

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\ du = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 u^k \ln u\ du\right) + \int_0^1 \frac{u^{n+1}\ln u}{1-u}\ du.$$

4/ La fonction $g : u \longmapsto \dfrac{u\ln u}{1-u}$ définie sur $]0,1[$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. Son prolongement est continu sur $[0,1]$. Donc il est borné et g aussi.

5/ D'après 4/ on peut choisir M tel que $\forall u \in]0,1[$, $\dfrac{u|\ln u|}{1-u} \leq M$. On a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{u^{n+1}\ln u}{1-u}\ du\right| \leq \int_0^1 Mu^n\ du = \frac{M}{n+1}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{u^{n+1}\ln u}{1-u}\ du = 0$, soit $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\ du = \sum_{0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u^k\ln u\ du\right)$.

6/ Calculons $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln u\ du$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Une IPP donne

$$\int_0^1 t^k \ln t\ dt = \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \ln t\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t}\ dt = -\int_0^1 \frac{t^k}{k+1}\ dt = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Donc $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\ du = \sum_{0}^{+\infty} -\frac{1}{(k+1)^2} = -\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$