LM 250 **Examen II** **1X-06-2013**

Ni calculatrices ni documents

Exercice n°1 **8 − 6**

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1/ \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt \qquad\qquad 2/ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^{5/4}}\, dt.$$

Exercice n°2 **2 − 2 − 4 − 4 − 10**

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t^2 e^{-t}$.

Pour $n \geq 1$ soit $u_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\quad u_n(t) = n\,\big(f(t)\big)^n$.

0/ Montrer que $2 < e$.

1/ En déduire que $M = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \big|f(t)\big| < 1$.

2/ Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

On note S la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $S(t) = \sum\limits_{1}^{+\infty} u_n(t)$.

3/ Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$

4/ Montrer que S est dérivable sur $]0, +\infty[$. $\quad\big($Localiser$\big)$

Exercice n°3 **2 − 4 − 2 − 6 − 10 − 8 − 10**

1/ Soit f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{4 - x^2}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ converge.

2/ Montrer que $\forall x \in]0, 1] \qquad f(x) = \ln x \times \left(\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^{n+1}} \right)$.

3/ Montrer que la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \big|x \ln x\big|$ est bornée sur $]0, 1]$.

4/ En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\ln x \times x^{2n}}{4^{n+1}}$ converge normalement sur $]0, 1]$.

5/ Montrer que
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{4 - x^2}\, dx = -\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}(2n+1)^2}.$$

6/ Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes : (CSI + ♦)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{4^{t+1}(2t+1)^2} \leq \frac{1}{4(2n+1)^2} \int_n^{+\infty} 4^{-t}\, dt.$$

7/ En utilisant 6/ avec $n = 2$, montrer que

$$-\frac{3709}{14400} - \frac{1}{1600 \times \ln 4} \leq \int_0^1 \frac{\ln x}{4 - x^2} \leq -\frac{3709}{14400}.$$

Rappels au dos

Equivalents $\ln x \underset{1}{\sim} x-1 \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad \displaystyle\int a^{-x}\,dx = -\frac{a^{-x}}{\ln a} + C$

DSE $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in]-1,1[\ \frac{1}{1-x} = \sum_0^{+\infty} x^n$

Croissances comparées $\forall \alpha > 0,\ \ln x \underset{+\infty}{=} O(x^\alpha)$ et $\ln x \underset{0^+}{=} O\big(x^{-\alpha}\big)$.

Inégalité intégrale Soit f décroissante positive et g continue positive sur $[a,b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Alors
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \le f(a)\int_a^b g(t)\,dt \qquad \blacklozenge$$

Rappels de cours

Critère de Riemann pour les intégrales

Soit $\alpha > 1$ et f continue sur $[a,+\infty)$. Si $f(t) \underset{+\infty}{=} O(1/t^\alpha)$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Soit $\alpha < 1$ et f continue sur $[0,a]$. Si $f(t) \underset{0^+}{=} O(1/t^\alpha)$ alors $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ converge.

Critère de Riemann pour les séries : *Soit $\sum u_n$ une série. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{+\infty}{=} O(1/n^\alpha)$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Critère de D'Alembert Soit $\sum u_n$ une série. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

Comparaison série intégrale CSI. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue décroissante positive sur $[n,+\infty)$. Si $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors* $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{n+1}^{+\infty} f(j) \le \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$

Soit $\sum u_n$ une **série de fonctions** définies sur un intervalle I, convergeant absolument sur I et soit $S : x \longrightarrow S(x)$ sa somme définie pour $x \in I$. Elle converge **normalement** sur I s'il existe une **série majorante** $\sum m_n$ convergente telle que $\forall n \ge n_0$ et $\forall x \in I$, $\big|u_n(x)\big| \le m_n$.

Théorème de continuité. *Si les u_n sont continues et si $\sum u_n$ CV normalement sur I, alors S est continue sur I.*

Théorème de dérivation. *Si les u_n sont dérivables et si la série $\sum u_n'$ converge normalement sur I, alors S est dérivable sur I et $S' = \displaystyle\sum_0^{+\infty} u_n'$.*

Localisation : Pour montrer que S est continue ou dérivable sur I, il suffit d'appliquer le théorème correspondant pour tout intervalle fermé borné $[a,b]$ inclus dans I.

Théorème de Fubini. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle $]a,\,b[$ borné. Si $\sum u_n$ converge normalement sur $]a,\,b[$, alors $\displaystyle\sum \left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right)$ converge. De plus*
$$\int_a^b \left(\sum_0^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_0^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right).$$