Exercice n°1

1/ La seule singularité de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ est en $+\infty$. On fait une IPP.

Pour $A > 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t^{1/2}}\,dt \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{\cos t}{t^{1/2}}\Big|_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt$. Passons à la limite lorsque $A \longrightarrow +\infty$.

Comme $\displaystyle\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ par Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt$ converge. D'autre part $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A^{1/2}} = 0$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

2/ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^{5/4}}\,dt$ possède deux singularités : en 1 et en $+\infty$.

– En 1 on a $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$ d'où $\displaystyle\frac{\ln t}{(t-1)^{5/4}} \underset{1^+}{\sim} \frac{t-1}{(t-1)^{5/2}} = \frac{1}{(t-1)^{1/4}}$. Par Riemann, l'intégrale converge en 1.

– En $+\infty$ par croissance comparée $\ln t = O(t^{1/8})$ d'où $\displaystyle\frac{\ln t}{(t-1)^{5/4}} = O\left(\frac{t^{1/8}}{t^{5/4}}\right) = O\left(\frac{1}{t^{9/8}}\right)$. D'après Le critère de Riemann, l'intégrale converge en $+\infty$. Donc elle converge.

Exercice n°2

1/ On a $\displaystyle e = e^1 = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!} > \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} = 1 + 1 = 2.$

2/ On a $f'(t) = (2t - t^2)e^{-t}$. Donc f est croissante sur $[0,2]$, puis décroissante sur $[2,+\infty]$.

Elle atteint son maximum pour $t = 2$. D'où $M = f(2) = 2^2e^{-2} = (2/e)^2 < 1$ d'après 0/.

3/ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, $\left|u_n(t)\right| = nf(t)^n \leq nM^n$. Posons $m_n = nM^n$. Alors $\displaystyle\frac{m_{n+1}}{m_n} = \frac{(n+1)M^{n+1}}{nM^n} = \frac{n+1}{n}M$. Comme $M < 1$ on voit, par D'Alembert, que $\sum m_n$ converge. Donc la série de fonctions converge normalement sur $[0,+\infty[$.

4/ La fonction $\displaystyle S = \sum_0^{+\infty} u_n$ est la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Donc S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5/ On a $\forall t > 0, \quad u_n'(t) = n\big(2nt^{2n-1}e^{-tn} - nt^{2n}e^{-tn}\big) = -nu_n(t) + 2n\dfrac{u_n(t)}{t}$.

Fixons $a > 0$. Pour $t \geq a$, $\left|u_n'(t)\right| \leq n\left|u_n(t)\right| \times \left(1 + \dfrac{2}{t}\right) \leq n^2M^n\left(1 + \dfrac{2}{a}\right)$.

Donc $\mu_n = n^2M^n\left(1 + \dfrac{2}{a}\right)$ est un majorant de $|u_n'|$ sur $[a,+\infty[$. Par D'Alembert on voit que $\sum \mu_n$ converge. La série $\sum u_n'$ est donc normalement convergente sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$. Les u_n étant dérivables, on en déduit que S est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ soit, par localisation, sur $]0,+\infty[$.

Exercice n°3

1/ L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{4-t^2}\,dt$ a une singularité en 0. Par croissance comparée $\ln t \underset{0^+}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$.

Par Riemann l'intégrale converge.

2/ Pour $0 < x \leq 1$ on a $\dfrac{\ln x}{4-x^2} = \dfrac{\ln x}{4} \times \dfrac{1}{1-x^2/4}$. Pour $x^2/4 < 1$ le DSE de $z \longrightarrow \dfrac{1}{1-z}$ permet d'écrire $\dfrac{1}{1-x^2/4} = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$. En multipliant par $\dfrac{\ln x}{4}$ on obtient le résultat.

3/ Par croissance comparée $x\ln x \underset{0^+}{=} O\big(x \times x^{-1/2}\big)$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. On en déduit que la fonction $x \longrightarrow |x\ln x|$ se prolonge par continuité en 0. Elle est donc bornée sur $]0,1]$.

4/ Soit $K = \displaystyle\sup_{[0,1]} |x\ln x|$. Alors pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in]0,1]$,

$$\left|\frac{\ln x \times x^{2n}}{4^{n+1}}\right| \leq \frac{K \times x^{2n-1}}{4^{n+1}} \leq \frac{K}{4^{n+1}}.$$

En posant $m_n = \dfrac{K}{4^{n+1}}$ pour $n \geq 1$, on a une série majorante $\sum m_n$ absolument convergente.

5/ Calculons $\displaystyle\int_0^1 \ln t \times t^{2n}\, dt$ pour $n \geq 0$. Une IPP donne

$$\int_0^1 \ln t \times t^{2n}\, dt = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \times \ln t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \times \frac{1}{t}\, dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\, dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'après 4/ on peut appliquer Fubini sur $]0,1]$ soit

$$\int_0^1 \left(\sum_1^{+\infty} \frac{\ln t \times t^{2n}}{4^{n+1}}\right) dt = \sum_1^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\ln t \times t^{2n}}{4^{n+1}}\, dt\right) = \sum_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{4^{n+1}(2n+1)^2}\right).$$

En ajoutant $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{4}\, dt = -\frac{1}{4}$ pour $n = 0$, on obtient le résultat.

5/ La fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{4^{x+1}(2x+1)^2}$ étant décroissante positive, le CSI donne pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{4^{t+1}(2t+1)^2},$$

ce qui est l'inégalité de gauche. Pour celle de droite on utilise l'inégalité intégrale ♦ sur $[n,+\infty)$ avec $f(t) = \dfrac{1}{4(2t+1)^2}$ et $g(t) = 4^{-t}$. Il vient

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{4^{t+1}(2t+1)^2} \leq \frac{1}{4(2n+1)^2} \int_n^{+\infty} 4^{-t}\, dt.$$

7/ D'après 5/

$$-\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2} - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2} \leq \int_0^1 \frac{\ln x}{4-x^2}\, dx \leq -\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2}.$$

△ On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16\times 9} + \frac{1}{64\times 25} = \frac{3600}{14400} + \frac{100}{14400} + \frac{9}{14400} = \frac{3709}{14400}$.

△ D'après 6/

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}(2k+1)^2} \leq \frac{1}{4\times 5^2} \int_2^{+\infty} 4^{-t}\, dt = \frac{1}{100} \times \left(\frac{4^{-t}}{-\ln 4}\Big|_2^{+\infty}\right) = \frac{1}{1600 \times \ln 4}.$$

Finalement
$$-\frac{3709}{14400} - \frac{1}{1600\times\ln 4} \leq \int_0^1 \frac{\ln x}{4-x^2} \leq -\frac{3709}{14400}.$$