LM 250 **Corrigé** **09 Janv 2014**

Exercice n^{o}1

1/ Tous les termes généraux sont en $O\left(1/n^2\right)$. D'après Riemann, les séries convergent.

2/ On a $\dfrac{1}{n^2-1/4}=\dfrac{1}{n-1/2}-\dfrac{1}{n+1/2}$. En posant $x_n=\dfrac{-1}{n+1/2}$, on voit que c'est une série téléscopique. De plus, avec $n_0=2$ on a $\displaystyle\sum_2^{+\infty}\frac{1}{n^2-1/4}=\lim_{n\to\infty}x_n-x_1=-x_1=-\left(\frac{-1}{3/2}\right)=\frac{2}{3}$.

3/ On a $\displaystyle\zeta(2)=\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_1^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_1^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_1^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\times\zeta(2)$. Par différence on obtient $\displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\zeta(2)$.

4/ On part de $\dfrac{1}{\left(n^2-1/4\right)^2}=\dfrac{4}{\left(2n-1\right)^2}+\dfrac{4}{\left(2n+1\right)^2}-\dfrac{2}{n^2-1/4}$, puis on somme.

– $\displaystyle\sum_2^{+\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}=\sum_1^{+\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}-1=\frac{3}{4}\zeta(2)-1$. Après sommation le premier terme donne donc $3\times\zeta(2)-4=3S-1$.

– $\displaystyle\sum_2^{+\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}=\sum_2^{+\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}-\frac{1}{(2\times 2-1)^2}$. Par comparaison avec le premier terme, le second donne $3S-1-\dfrac{4}{9}$.

– D'après 2/ le dernier terme donne $\dfrac{-4}{3}$.

En additionnant on obtient $6S-2-\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{3}=6S-\dfrac{34}{9}$.

5/ D'après 2/ et 4/, $\dfrac{15}{16}\left(6S-\dfrac{34}{9}\right)\le 4\left(\dfrac{2}{3}-S\right)\le 6S-\dfrac{34}{9}$.

L'inégalité de droite donne $\dfrac{8}{3}+\dfrac{34}{9}\le 10S$, soit $\dfrac{24+34}{9\times 10}=\dfrac{29}{45}\le S$.

De même à gauche $15\times 6S-\dfrac{15\times 34}{9}\le\dfrac{16\times 8}{3}-64S$ soit $(90+64)S\le\dfrac{5\times 34+128}{3}$.

Il vient $S\le\dfrac{298}{3\times 154}=\dfrac{149}{3\times 77}=\dfrac{149}{231}$ soit $0.644444...\le 0.644934...\le 0.645021....$

Exercice n^{o}2

1/ Par hypothèse $R>0$. Pour tout $x\in]-R,R[$, $3S'(x)=3\displaystyle\sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et

$$3xS'(x)=3x\sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=3\sum_0^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}=3\sum_1^{+\infty}na_nx^n=3\sum_0^{+\infty}na_nx^n.$$

En additionnant $3S'(x)+3xS'(x)+S(x)$ il vient

$$3(1+x)S'(x)+S(x)=\sum_0^{+\infty}\big((3n+3)a_{n+1}+(3n+1)a_n\big)x^n.$$

Si S est solution de (E) alors $(3n+3)a_{n+1}+(3n+1)a_n=0$ pour tout n.

2/ On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{3n+1}{3n+3}\right| = 1$. Donc, par la règle de D'Alembert, $R=\dfrac{1}{1}=1$.

3/ Supposons y solution de (E). Alors

$$\big((1+x)^{1/3}y\big)'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}y(x)+(1+x)^{1/3}y'(x) = \frac{y(x)+3(1+x)y'(x)}{3(1+x)^{2/3}} = 0.$$

D'où le résultat.

4/ D'après 3/ toute solution de (E) est de la forme $y(x)=\dfrac{\text{Cste}}{(1+x)^{1/3}}$. D'où Cste $=y(0)$. La somme S est donc de cette forme. Comme $S(0)=a_0=1$ on a $S(x)=\dfrac{1}{(1+x)^{1/3}}$ pour $|x|<1$.

Exercice n°3

1/ Calculons le maximum de $\big|u_n\big|$ sur $]0,1[$. On a $u_n'(x) = -x^{n-1}\ln x - \dfrac{x^{n-1}}{n}$. Donc $u_n'(x)$ s'annule pour $\ln x = -1/n$. On a alors $\big|u_n(x)\big| = \dfrac{x^n}{n^2} < \dfrac{1}{n^2}$. On pose donc $m_n=\dfrac{1}{n^2}$. Par Riemann $\sum m_n$ converge et $\sum u_n$ converge normalement sur $]0,1]$.

2/ Une IPP donne

$$\int_0^1 t^n \ln t\ dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\times \ln t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{t}\ dt = -\int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\ dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

3/ Pour $t\in]0,1[$, $(\ln t)\big(\ln(1-t)\big) = -\sum\limits_1^{+\infty}\dfrac{t^n\ln t}{n}$. On a donc

$$\int_0^1 (\ln t)\big(\ln(1-t)\big)dt = -\int_0^1\left(\sum_1^{+\infty}u_n(t)\right)dt.$$

D'après 1/ Fubini s'applique, et d'après 2/ $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)\ dt = \int_0^1 \frac{t^n\ln t}{n}\ dt = \frac{-1}{n(n+1)^2}$. Finalement

$$\int_0^1 (\ln t)\big(\ln(1-t)\big)dt = -\int_0^1\left(\sum_1^{+\infty}u_n(t)\right)dt = -\sum_1^{+\infty}\left(\int_0^1 u_n(t)\ dt\right) = \sum_1^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}.$$