UPMC
PeiP2

LM250
2013-2014

TD 1 : Sommes finies, convergence de suites...

Exercice 1. *Sommes*

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} k^2.$$
3. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la quantité suivante :
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4.$$
4. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Exercice 2. *Exemples et contre-exemples*

1. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   - si $x \neq 0$, alors $f(x) = x^2 \sin(1/x)$,
   - $f(0) = 0$,

   est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Encore des sommes*

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
2. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

3. Les quantités $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k2^{-k}$ convergent-elles quand $n \to +\infty$? Si oui quelles sont les limites ?

Exercice 4. *Des polynômes pour éviter la triche*

Quand on jette deux dés, on obtient des résultats entre 2 et 12. Montrer qu'on ne peut pas piper deux dés pour que chaque résultat tombe avec la même probabilité.

Exercice 5. *Exponentielle*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. On note e leur limite commune. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6. *Calculs de limite*

Dire si elles existent et le cas échéant, déterminer la valeur des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$,
3. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand $n \to +\infty$,
4. $v_n = \left(\frac{1}{d}\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^{\frac{1}{n}}\right)^n$, quand $n \to \infty$, où les x_k sont des réels strictement positifs.

Exercice 7. *Intégrales*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$,
2. $\int_2^3 \cos(x)\exp(x) dx$,
3. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)} dx$,
4. $\int_4^5 (x^2+2x)\exp(x)$.