TD 5 : Séries entières

Exercice 1. *Vrai Faux*

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n X^n$ et $\sum (-1)^n a_n X^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n X^n$ et $\sum (-1)^n a_n X^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n X^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n X^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^-.
5. Si $f(X) = \sum a_n X^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^p} = +\infty$.

Exercice 2. *Rayons de convergence*

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

1. $a_n \to l \neq 0$,
2. (a_n) est périodique non nulle,
3. $a_n = \frac{n^n}{n!}$,
4. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.

Exercice 3. *Fonction Γ d'Euler*

Si $z > 0$, on pose $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$. Montrer que pour tout $a > 0$, Γ est développable en série entière au voisinage de a.

Exercice 4. *Sommes*

Après avoir déterminé les rayons de convergence, donner la valeur des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 x^n$,
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n(n+2)}$,
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \cos(n\theta)$.

Exercice 5. *DSE*

Montrer que la fonction $(\arcsin(X))^2$ est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer les coefficients.