Bilan Fourier

Coefficients de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique continue par morceaux, on définit ses coefficients de Fourier complexes :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \oint f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

On définit les coefficients de Fourier réels : $a_0(f) = c_0(f) = \oint f(t)dt$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 2\oint f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = 2\oint f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Quelques relations

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad b_n(f) = i\big(c_n(f) - c_{-n}(f)\big).$$

Si f est C^1 par morceaux et continue alors $c_n(f') = inc_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ce qui donne pour les coefficients réels : $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Les théorèmes

Théorème 1 (Parseval) *Soit f, 2π-périodique et continue par morceaux alors*

$$\oint |f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k>0}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2).$$

Théorème 2 (Dirichlet) *Soit f, 2π-périodique et C^1 par morceaux, alors il y a convergence simple des séries de Fourier :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}\big(f(x^+) + f(x^-)\big) = \sum_{n\in Z} c_n(f)e^{inx} = a_0(f) + \sum_{k>0}\big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big).$$

Théorème 3 (sans nom) *Soit f, 2π-périodique, C^1 par morceaux et* **continue***, alors les séries de Fourier*

$$\sum_{\substack{TG\\ n\in\mathbb{Z}}} c_n(f)e^{inX}$$

et

$$a_0(f) + \sum_{\substack{TG\\ k>0}}\big(a_k(f)\cos(kX) + b_k(f)\sin(kX)\big)$$

convergent normalement vers f.