UPMC
PeiP2

LM250
2013-2014

Évaluation 3 – Correction

Exercice 1. Vu en TD.

Exercice 2.

1. à 4. Vu en TD.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}e^{-1}$, donc $\|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \geq \sqrt{n}e^{-1}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\sum \|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge donc grossièrement, et $\sum g_n$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$. On peut en fait montrer de la même manière que $\sum g_n$ ne converge normalement sur aucun segment $[a, b]$ (avec $a \neq b$) contenant 0.

Exercice 3.

1. Notons $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{1} = 1$.

2. Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et C^∞ sur $]-R, R[$ (au moins).

3. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Or

$$(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \frac{x^{2k}}{(2k)^\alpha} = 2^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k^\alpha} = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

4. $L_{\alpha+1}$ est la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1, donc $L_{\alpha+1}$ est dérivable (et même C^∞, cf. question 2) sur $]-1, 1[$ et sa dérivée admet un développement en série entière de même rayon de convergence, dont les termes s'obtiennent par dérivation terme terme du développement de $L_{\alpha+1} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha+1}}$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad L'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$$

donc

$$xL'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = L_\alpha(x).$$

5.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad L_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

(série géométrique ; attention au premier terme !).

$$\forall x \in]-1,1[, \quad xL'_1(x) = L_0(x)$$

donc L_1 est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Or $L_1(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$ donc L_1 est la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$.

Enfin,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad L_{-1}(x) = xL'_0(x) = x\frac{(1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$