UPMC
PeiP2

LM250
2013-2014

Évaluation 3

Exercice 1.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les trois cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique non nulle,
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$.

Exercice 2. *Série de fonctions*

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ les suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-nx^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x^2}}.$$
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}^*$.
4. Établir un lien entre f' et g sur $\mathbb{R}^*$.
5. La série $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? sur tout segment de $\mathbb{R}$?

Exercice 3.

Soit α un réel.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$.
2. Justifier que la fonction $L_\alpha : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est définie et C^∞ sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$
4. Pour tout $x \in]-1, 1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
5. Exprimer explicitement $L_\alpha(x)$ en fonction de $x \in]-1, 1[$ lorsque $\alpha = 0$, -1 et 1.