Le barème est pour les étudiants du cours A

Exercice n°1 **4 – 4 – 4**

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1/\ \int_0^1 \frac{1-\cos t}{\sin^4 t}\,dt, \qquad 2/\ \int_0^2 \frac{\ln t}{t^{1/3}}\,dt, \qquad 3/\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^5(e^t-2)}\,dt.$$

Exercice n°2 **0 – 2 – 4 – 4 – 6 – 6 – 6**

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique, définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \frac{1}{2}\chi_{[0,1]}(x)$ i.e. $f(x) = \frac{1}{2}$ pour $0 \le x \le 1$ et $f(x) = 0$ pour $1 < x \le \pi$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ la somme partielle de la série de Fourier réelle de f.

1/ Dessiner le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

2/ Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

3/ Pour tout $x \in [0,\pi]$, calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

4/ La série de Fourier de f converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

5/ La série de Fourier de f converge-t-elle normalement $[-1/2, 1/2]$? (Utiliser 4/)

6/ Montrer que $\sum_0^{+\infty} \frac{\sin k}{k} = \frac{\pi-1}{2}$.

7/ Montrer que $\sum_0^{+\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2} = \frac{\pi-1}{2}$.

Exercice n°3 **4 – 8 – 4 – 8 – 8 – 8**

On note pour $z \in \mathbb{C}$, $I(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - z\sin^2\theta}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\,d\theta$.

On admet que pour x réel tel que $x < 1$, $I(x) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Montrer les assertions suivantes :

1/ $\sum a_n$ diverge. $\left(\text{Noter que } a_n \ge \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\cos\theta\,d\theta.\right)$

2/ $\forall x \in [0,1[$, $\sum a_n x^n$ converge et $\sum_0^{+\infty} a_n x^n = I(x)$.

3/ Le rayon de convergence R de $\sum a_n X^n$ est $R = 1$.

4/ Le domaine $\mathcal{D}$ de convergence de $\sum a_n X^n$ est $\mathcal{D} = \big\{z \in \mathbb{C}, |z| \le 1,\ z \ne 1\big\}$.

5/ $\forall z \in D(0,1)$, $\quad \sum_0^{+\infty} a_n z^n = I(z)$.

6/ $\forall z \in D(0,1)$, $\quad \big(I(z)\big)^2 = \frac{\pi^2}{4(1-z)}$.

Fonctions classiques $\forall z \in D(0,1),\ \dfrac{1}{1-z} = \sum_{0}^{+\infty} z^n \qquad \forall \alpha > 0,\ \ln x \underset{0^+}{=} O(1/x^\alpha).$

RAPPELS DE COURS

■ **Critère de Riemann en 0.** *Soit $b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f continue par morceaux sur $]0, b]$*

– *Si $f(x) = O\big(x^{-\alpha}\big)$ dans un voisinage de 0^+ et $\alpha < 1$, alors $\int_0^b f(t)\,dt$ converge absolument,*

– *si $x^{-\alpha} = O\big(f(x)\big)$ dans un voisinage de 0^+ et $\alpha \geq 1$, alors $\int_0^b |f|(t)\,dt$ diverge.*

Corollaire 1. *Soit f continue sur $[\,a,\,b\,]$ et g est dérivable sur $[\,a,\,b\,]$. S'il existe $x_0 \in [\,a,\,b\,]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et $g(x_0) = 0$ alors $\int_a^b \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| dx$ diverge.*

CAM. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. La série $\sum u_n v_n$ converge si*

$$\text{1/ } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone,} \quad \text{2/ } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0, \quad \text{et 3/ la suite } \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Soit $\sum u_n$ une **série de fonctions** définies sur un intervalle I, et soit $S : x \longrightarrow S(x)$ sa somme définie pour $x \in I$. Alors $\sum u_n$ converge **normalement** sur I si $\sum \sup_{x\in I} \big|u_n(x)\big|$ converge.

Théorème de continuité. *Si les u_n sont continues et si $\sum u_n$ CV normalement sur I, alors S est continue sur I.*

Théorème de Fubini. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle $]a,\,b[$ borné. Si $\sum u_n$ converge normalement sur $]a,\,b[$, alors $\sum \left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right)$ converge. De plus*

$$\int_a^b \left(\sum_{0}^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right).$$

Séries entières Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si elle converge pour $|z| < A$ où $A > 0$, alors son rayon de convergence R vérifie $R \geq A$. Si elle diverge pour une valeur z_0 alors $R \leq |z_0|$.

Proposition 1. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de RCV R_a et R_b et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors le RCV R_c de $\sum c_n z^n$ vérifie $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, $\left(\sum_{0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{0}^{+\infty} c_n z^n$.*

Fourier Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux sur $[-\pi, \pi[$. Les cœfficients de Fourier réels de f sont définis en posant pour $n = 0$, $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ et pour $n > 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Identité de Parseval. $|a_0|^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2\,dx.$

Théorème de Dirichlet. *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $a_0 + \sum_{1}^{+\infty} (a_n\cos(nx) + b_n\sin nx) = \dfrac{1}{2}\big(f(x^-) + f(x^+)\big)$.*