Exercice n°1

1/ La seule singularité possible est en 0 où $\dfrac{1-\cos t}{\sin^4 t}$ est une forme indéterminée. Comme $1-\cos t \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ et $\sin t \underset{0}{\sim} t$, on a $\dfrac{1-\cos t}{\sin^4 t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2t^2}$. Par Riemann, l'intégrale diverge.

2/ La seule singularité est en 0. Comme $\ln t = O\left(\dfrac{1}{t^{1/3}}\right)$ en 0^+, on a $\dfrac{\ln t}{t^{1/3}}\ dt = O\left(\dfrac{1}{t^{2/3}}\right)$ en 0^+. D'après Riemann, l'intégrale converge.

3/ Il y a deux singularités, en $\ln 2$ et en $+\infty$. D'après le corollaire au critère de Riemann, il y a divergence en $\ln 2$. Donc l'intégrale diverge.

Exercice n°2

2/ Les cœfficients b_n sont nuls car f est paire. On a $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}$. Pour $n > 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(nt)}{n}\bigg|_{-1}^{1}\right) = \frac{\sin n - \sin(-n)}{2n\pi} = \frac{\sin n}{n\pi}.$$

3/ La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,\pi]$, et Dirichlet s'applique en tout $x \in [0,\pi]$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ en tout point où f est continue soit pour $x < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{2}$ et pour $x > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$. En 1, qui est le seul point de discontinuité dans $[0,\pi]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = \frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{1}{4}.$$

4/ La somme de la série de Fourier de f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Par la contraposée du Théorème de Continuité, il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.

5/ Il faut déterminer la nature de la série numérique $\sum \sup\limits_{[-1/2,1/2]} \left|a_n\cos(nx)\right|$ soit $\sum |a_n|$. Comme le sup sur $\mathbb{R}$ de la fonction $|\cos X|$ est atteint en 0, les $\sup\limits_{[-1/2,1/2]} \left|a_n\cos(nx)\right|$ sont atteints en $x = 0$ de même que les $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|a_n\cos(nx)\right|$. On a vu en 4/ que la série de Fourier de f ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. D'où la divergence de $\sum \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|a_n\cos(nx)\right|$ soit $\sum |a_n|$. Donc il n'y a pas convergence normale sur $[-1/2,1/2]$.

6/ En explicitant $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(0) = f(0) = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\times 0) = \frac{1}{2}$ soit $\dfrac{1}{2\pi} + \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k\pi} = \frac{1}{2}$. Donc $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{\sin k}{k}$ converge et sa somme S vérifie $\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{S}{\pi} = \dfrac{1}{2}$. D'où $S = \dfrac{\pi-1}{2}$.

7/ L'identité de Parseval donne $\displaystyle\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\times 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4\pi}.$

En multipliant tout par $2\pi^2$ on obtient $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi}{2}$ soit $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}.$

Exercice n°3

1/ Sur $[0,\pi/2]$, $\sin^{2n}\theta \geq \sin^{2n}\theta\cos\theta$ d'où $a_n \geq \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\cos\theta\,d\theta = \left.\frac{\cos^{2n+1}\theta}{2n+1}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2n+1}$.
D'après Riemann, $\displaystyle\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge. Donc $\sum a_n$ diverge par comparaison.

2/ Pour $x \in [0,1[$ et $\theta \in [0,\pi/2]$, $0 \leq x\sin^2\theta \leq x < 1$, d'où $\displaystyle\frac{1}{1-x\sin^2\theta} = \sum_0^{+\infty} x^n \sin^{2n}\theta$. Donc

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_0^{+\infty} x^n \sin^{2n}\theta\right) d\theta.$$

Soit $\sum u_n(\theta)$ la série de fonctions définies par $u_n(\theta) = x^n\sin^{2n}\theta$. Pour $\theta \in [0,\pi/2]$, $\left|u_n(\theta)\right| \leq x^n$. Comme $\displaystyle\sum_0^{+\infty} x^n$ converge, $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,\pi/2]$. D'où par Fubini,

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_0^{+\infty} x^n \sin^{2n}\theta\right) d\theta = \sum_0^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2} x^n\sin^{2n}\theta\ d\theta\right) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n.$$

3/ D'après 2/, $\sum a_n x^n$ converge pour $x \in [0,1[$ donc $R \geq 1$. Réciproquement, comme $\sum a_n$ diverge, $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

4/ Comme $R = 1$, $\mathcal{D}$ contient le disque ouvert $D(0,1)$. On a vu que $\sum a_n$ diverge et donc $1 \notin \mathcal{D}$. Montrons que pour $|z| = 1$, $z \neq 1$ $z \in \mathcal{D}$ i.e. $\sum a_n z^n$ converge. Pour appliquer le critère d'Abel monotone il faut vérifier ▲ que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0 et ▼ que les sommes partielles $\displaystyle\sum_0^n z^k$ sont bornées lorsque n varie.

▲ Il est admis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. D'autre part $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2\theta \leq 1$ d'où $n \longrightarrow \sin^{2n}\theta$ est une suite décroissante. Par intégration, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
▼ On a $\displaystyle\sum_0^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ d'où $\displaystyle\left|\sum_0^n z^k\right| \leq \frac{2}{|1-z|}$: majorant indépendant de n.
Le critère d'Abel s'applique et $\sum a_n z^n$ converge, soit $z \in \mathcal{D}$ pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$.
Finalement $\mathcal{D} = \big\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1,\ z \neq 1\big\}$.

5/ Pour $|z| < 1$, $\displaystyle\frac{1}{1-z\sin^2\theta} = \sum_0^{+\infty} z^n\sin^{2n}\theta$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$. D'où $I(z) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\sum_0^{+\infty} z^n\sin^{2n}\theta\right) d\theta$. Pour $|z| < 1$ Fubini s'applique comme dans le cas réel. En posant $u_n(\theta) = z^n\sin^{2n}\theta$, on a pour $\theta \in [0,\pi/2]$, $\left|u_n(\theta)\right| \leq |z|^n$. Ici $|z|$ joue le rôle de x dans le 2/. Donc Fubini s'applique et

$$I(z) = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_0^{+\infty} z^n\sin^{2n}\theta\right)\ d\theta = \sum_0^{+\infty} z^n\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\ d\theta\right) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n.$$

6/ On vient de voir que $z \longrightarrow I(z)$ est égal à son DSE sur $D(0,1)$. Donc $z \longrightarrow \big(I(z)\big)^2$ aussi. Or pour x réel, avec $|x| < 1$, il est admis que $\big(I(x)\big)^2 = \dfrac{\pi^2}{4(1-x)} = \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\sum_0^{+\infty} x^n$. Donc la série $\dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\sum_0^{+\infty} z^n$ est le DSE de $\big(I(z)\big)^2$ soit $\big(I(z)\big)^2 = \dfrac{\pi^2}{4(1-z)}$ pour $|z| < 1$.