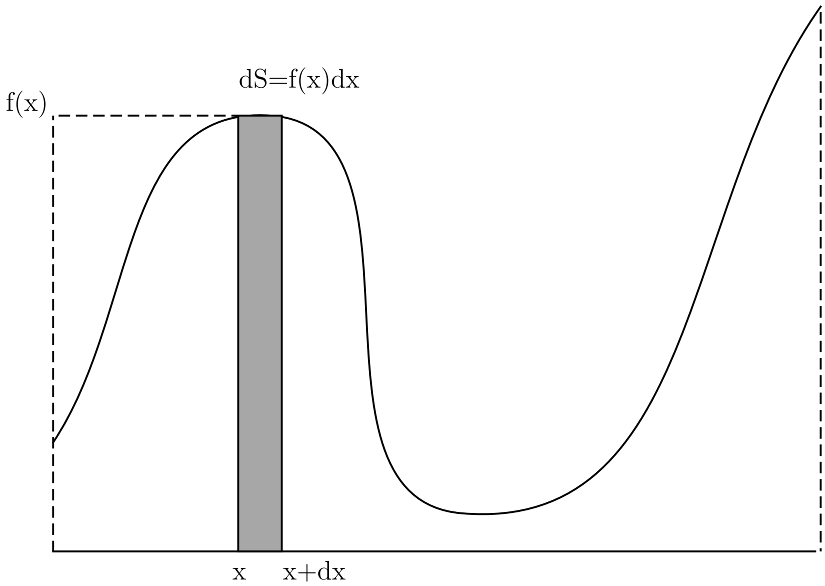
INTÉGRATION

Cours de licence de Nicolas LERNER

Université de Rennes 1

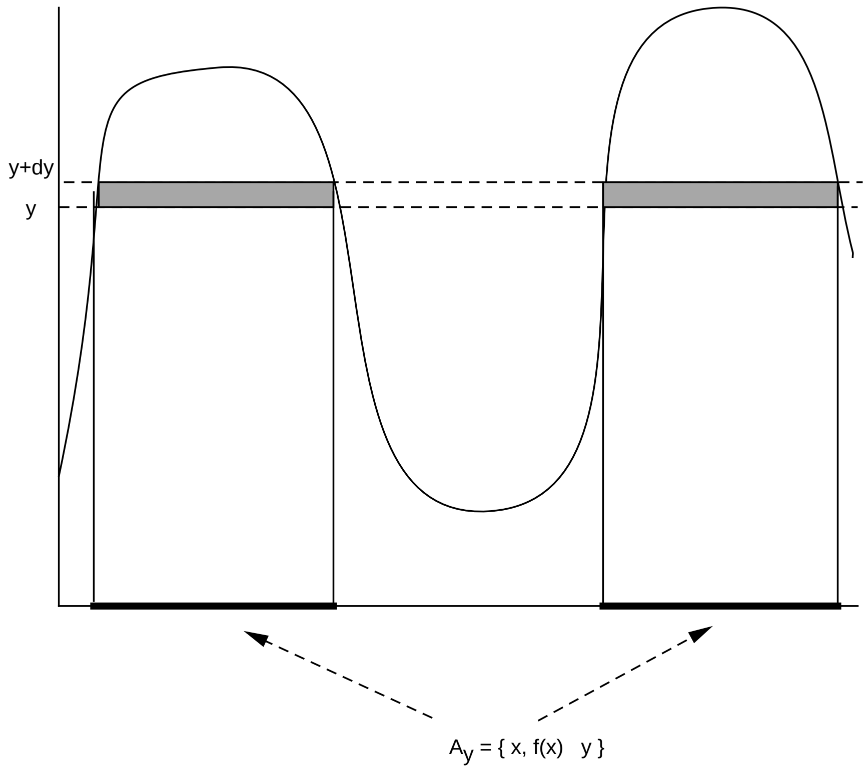
INTRODUCTION

Pourquoi une nouvelle théorie de l'intégration? L'intégrale de Riemann ne suffit-elle pas à intégrer la plupart des fonctions connues avec une bonne intuition? Il est sans doute important de répondre à ces deux questions avant d'aborder un cours d'intégration de licence de mathématiques. Le point de vue de Riemann est bien connu: pour intégrer une fonction $x \mapsto f(x)$, on somme les éléments de surface $dS = f(x)dx$ et on obtient $\int f(x)dx$, la surface entre la courbe et l'axe des x.



Bien que cette approche semble parfaitement naturelle et simple, elle présente l'inconvénient, dans une présentation rigoureuse, de demander beaucoup de régularité à la fonction que l'on intègre. Bien entendu, on peut intégrer comme cela des fonctions continues, des fonctions en escalier, etc.... Néanmoins, des modifications apparemment anodines de f (e.g. sur un ensemble dénombrable) peuvent créer un trouble considérable et détruire l'intégrabilité de f. C'est le cas par exemple de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ qui n'est pas intégrable au sens de Riemann, bien que nulle presque partout. Un esprit fort pourra objecter que l'intégration de fonctions aussi pathologiques ne présente aucun intérêt pour l'utilisateur. Bien qu'une telle objection puisse être aisément balayée, nous verrons plus bas des raisons encore plus fortes que cela de modifier la théorie de l'intégrale de Riemann. Le point de vue de Lebesgue est d'emblée différent. Au lieu de découper l'ensemble de départ en petits morceaux, on découpe l'ensemble d'arrivée (l'espace des y ici). Pour une valeur y donnée, on examine l'ensemble A_y des x tels que $f(x) \geq y$. En notant $|A_y|$ la "mesure" de A_y, l'élément infinitésimal de surface $d\Sigma$ est alors

$$d\Sigma = |A_y| dy$$



Les ensembles A_y peuvent être passablement compliqués et la seule difficulté est définir convenablement leur mesure. En utilisant cette méthode et diverses variantes, on parvient à intégrer beaucoup plus de fonctions que par la méthode de Riemann, à condition de savoir "mesurer" les ensembles de niveau de la fonction f. Les chapitres qui suivent décrivent en détail cette construction dans un cadre assez général.

En fait l'essentiel de la théorie de l'intégration pour l'utilisateur éclairé ne réside pas dans telle ou telle définition de l'intégrale. Les objets fournis par la théorie de

Lebesgue sont conceptuellement simples et de manipulation aisée, bien que leur construction nécessite un effort mathématique réel. Au premier rang de ces objets est l'espace fonctionnel L^1, l'espace des fonctions intégrables, espace normé complet (i.e. espace de Banach) pour la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)|dx.$$

C'est bien le mérite de la théorie de Lebesgue de fournir cet espace de fonctions ainsi que l'espace de Hilbert L^2, avec le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 1.6.8 du chapitre 1) fournit des conditions simples assurant la convergence de $\int f_n(x)dx$ vers $\int f(x)dx$: il suffit de savoir que, pour tout x, $\lim_n f_n(x) = f(x)$ et d'avoir une condition de domination du type $|f_n(x)| \le g(x)$ où $g \in L^1$. On pourrait mentionner également la théorie des intégrales multiples, dont la présentation par la théorie de Lebesgue est certainement plus simple que l'introduction d'ensembles "carrables". En bref, le manuel de l'utilisateur de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est simple, tant sur le plan conceptuel que sur le plan manipulatoire. En revanche, la construction effective des objets mathématiques afférents à cette théorie est non triviale. On rencontre inéluctablement des problèmes reliés à la logique mathématique, comme l'axiome du choix, pour la construction d'ensembles non mesurables, ainsi que des questions de cardinalité. La pathologie des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ est riche, et son exploration, même limitée, représente une réelle difficulté.

Le cours qui suit a été enseigné pendant plusieurs années à des étudiants de licence de mathématiques et de magistère à l'université de Rennes 1, sur une durée de 24 heures (2 heures $\times$ 12 semaines). Le chapitre 1 donne une présentation de la théorie générale de l'intégration avec les théorèmes fondamentaux de convergence (Beppo-Levi, Fatou, Lebesgue). Le chapitre 2, plus difficile, est consacré à la construction effective de la mesure de Lebesgue ; la démonstration du théorème de représentation de Riesz peut être omise en première lecture, et d'ailleurs, nous l'avons toujours reportée à une supplémentaire 13ième semaine, par le truchement d'un exposé de deux heures effectué par deux étudiants. Le chapitre 3 présente les espaces fonctionnels dont il a déjà été question plus haut, établit les inégalités classiques de Jensen, Hölder et Minkowski. Nous y étudions également les intégrales dépendant d'un paramètre, en distinguant la continuité et différentiabilité réelle de l'holomorphie. Nous développons plusieurs exemples comme la fonction Gamma et la fonction Zeta. Bien que la transformation de Fourier ne soit pas traitée en détail ici, nous donnons une preuve simple du lemme de Riemann-Lebesgue. Le chapitre 4 est consacré aux intégrales multiples et, en particulier, aux théorèmes de Fubini-Tonelli. Le chapitre 5 établit des théorèmes de changement de variables et notamment les théorèmes de passage en coordonnées polaires en toute dimension. Nous souhaitons ajouter un paragaphe 5.4 *Intégration sur une hypersurface de* $\mathbb{R}^n$, où nous traiterons notamment la formule de Green. Le chapitre 6 est consacré à la convolution et, outre les définitions de base, nous y donnons la preuve de l'inégalité de Young. Il faudrait sans doute ajouter un chapitre 7 sur les mesures complexes, le théorème de Radon-Nikodym et un chapitre 8 sur la fonction maximale, le théorème de différentiation de Lebesgue et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev.