2. CONSTRUCTION DE LA MESURE DE LEBESGUE SUR $\mathbb{R}^d$

2.1. Partitions de l'unité sur $\mathbb{R}^d$

Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit le support de f et on note $\operatorname{supp} f$ l'ensemble

$$\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^d, \text{il n'existe pas de voisinage } V \text{ de } x \text{ tel que } f_{|V} = 0 \ \}. \tag{2.1.1}$$

On peut remarquer que l'on a

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq 0\}}.$$

En effet, d'après (2.1.1), $x \notin \operatorname{supp} f$ équivaut à "il existe un voisinage V de x tel que $f = 0$ sur V". Par ailleurs, $x \notin \overline{\{x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq 0\}}$ équivaut à x est un point intérieur à $\{x \in \mathbb{R}^d, f(x) = 0\}$ car $(\overline{A})^c = \operatorname{int}(A^c)$. Par suite, l'appartenance à cet ensemble équivaut à "il existe un voisinage V de x tel que $f = 0$ sur V", qed. On vérifie donc que $\operatorname{supp} f$ est un fermé car $(\operatorname{supp} f)^c$ est la réunion des ouverts sur lesquels $f = 0$.

Le lecteur s'interrogera peut-être sur le caractère apparemment alambiqué de notre définition (2.1.1), mais c'est bien celle-ci qui aura un sens (en remplaçant $f = 0$ sur V par $f = 0$ μ-pp sur V) lorsque nous voudrons définir le support d'une fonction non continue de $L^1(\mu)$. Anticipons un peu sur le déroulement du cours, et supposons construite la mesure de Borel m sur $\mathbb{R}$ de l'exemple (1.5.10). Considérons $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction indicatrice des rationnels. Comme les rationnels sont une réunion dénombrable de points, $m(\mathbb{Q}) = 0$ et $f = 0$ m-pp. En définissant

$$\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^d, \text{il n'existe pas de voisinage } V \text{ de } x \text{ tel que } f_{|V} = 0 \ m\text{-pp} \ \}. \tag{2.1.1'}$$

on trouve naturellement $\operatorname{supp} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = \emptyset$. La définition (2.1.1) serait évidemment désastreuse, car la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ signifie que l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\}$ est $\mathbb{R}$. La bonne définition du support est donc donnée par (2.1.1)', et nous verrons que pour les fonctions continues, elle coïncide avec (2.1.1).

Nous laissons au lecteur la vérification du fait que la fonction ρ définie[1] par

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp -(1 - |x|^2)^{-1} & \text{pour } |x| < 1, \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

[1] $|x| = (\sum_{1 \leq j \leq d} x_j^2)^{1/2}$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

est indéfiniment différentiable (nous écrirons C^∞) à support compact $B_1 = \bar{B}(0,1)$, la boule unité euclidienne fermée de $\mathbb{R}^d$. L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, indéfiniment différentiables (resp. continues) et à support compact sera noté $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (resp. $C_c(\mathbb{R}^d)$). On peut remarquer que si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ on a $f(\mathbb{R}^d) = f(\operatorname{supp} f) \cup \{0\}$ et comme l'image continue du compact $\operatorname{supp} f$ est compacte, l'image $f(\mathbb{R}^d)$ est compacte.

PROPOSITION 2.1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K un compact inclus dans Ω. Alors il existe une fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$0 \le \varphi \le 1, \quad \varphi_{|K} = 1, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui présente par ailleurs un intérêt intrinsèque.

LEMME 2.1.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} |x-a|.$$

Alors la fonction $d(\cdot, A)$ est lipschitzienne de rapport ≤ 1, i.e.

$$|d(x_1,A) - d(x_2,A)| \le |x_1 - x_2|.$$

Cette propriété implique la continuité uniforme de $d(\cdot, A)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. En notant $d(x,A) = |x-A|$, pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que

$$|x_1 - A| \le |x_1 - a| < |x_1 - A| + \epsilon.$$

Il vient

$$|x_2 - A| - |x_1 - A| \le |x_2 - a| - |x_1 - a| + \epsilon \le |x_2 - x_1| + \epsilon$$

et, par conséquent, $|x_2 - A| - |x_1 - A| \le |x_2 - x_1|$. En échangeant les rôles de x_1 et x_2, on obtient

$$\Big| |x_2 - A| - |x_1 - A| \Big| \le |x_2 - x_1|, \qquad \square$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Comme K est un compact inclus dans Ω, on a

$$\epsilon_0 = \inf_{x \in K,\ y \notin \Omega} |x-y| = d(K, \Omega^c) > 0. \tag{2.1.3}$$

En effet, sinon on pourrait trouver des suites $x_k \in K$, et $y_k \in \Omega^c$ telles que

$$\lim_k (x_k - y_k) = 0.$$

Comme K est un compact de $\mathbb{R}^d$, on peut extraire une sous-suite convergente dans K de x_k. La suite $y_k - x_k$ tendant vers 0, on obtient, puisque Ω^c est fermé

$$\Omega^c \ni= \lim_l y_{k_l} = \lim_l (x_{k_l} + y_{k_l} - x_{k_l}) = x \in K$$

ce qui est impossible car $K \subset \Omega$. On obtient par conséquent

$$K + \frac{\epsilon_0}{2} B_1 \subset \Omega$$

car, si $|t| \leq \epsilon_0/2$ et $x \in K$, alors $x + t \in \Omega$ (sinon on aurait $x + t \in \Omega^c$ et $\epsilon_0 = d(K, \Omega^c) \leq \epsilon_0/2$ ce qui est impossible car $\epsilon_0 > 0$). Posons alors

$$\varphi(x) = \max(0, 1 - \frac{4}{\epsilon_0} |x - K_{\epsilon_0/4}|). \tag{2.1.4}$$

La fonction est à valeurs dans $[0,1]$ et continue comme maximum de deux fonctions continues. En outre, si $\varphi(x) \neq 0$, alors $|x - K_{\epsilon_0/4}| < \epsilon_0/4$ et donc

$$x \in K_{\frac{\epsilon_0}{4}} + \frac{\epsilon_0}{4} B_1 \subset K + \frac{\epsilon_0}{2} B_1,$$

ce qui implique d'après (2.1.1) que $\operatorname{supp} \varphi \subset K_{\epsilon_0/2} \subset \Omega$. Par ailleurs, si $x \in K_{\epsilon_0/4} \supset K$, on a $\varphi(x) = 1$.

Remarque. La fonction φ construite ci-dessus vaut 1 sur $K_{\epsilon_0/4}$ qui est un voisinage compact de K car $K_{\epsilon_0/4}$ est compact comme somme de deux compacts et $K_{\epsilon_0/4} \supset \cup_{x \in K} B(x, \epsilon_0/4) \supset K$. En outre, le lemme 2.1.2 implique que φ est lipschitzienne de rapport

$$\leq \frac{4}{\epsilon_0} = \frac{4}{\operatorname{dist}(K, \Omega^c)}.$$

Théorème 2.1.3. *Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et K un compact tels que $K \subset \Omega_1 \cup \ldots \Omega_m$. Alors pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, il existe des fonctions $\psi_j \in C_c(\Omega_j; [0,1])$ telles que*

$$1 = \sum_{1 \leq j \leq m} \psi_{j|K}.$$

On dira que $(\psi_j)_{1\le j\le m}$ est une partition de l'unité sur K, subordonnée au recouvrement $(\Omega_j)_{1\le j\le m}$. En particulier, si $\theta \in C_c(\cup_{1\le j\le m}\Omega_j)$, en utilisant ce qui précède pour $K = \operatorname{supp}\theta$, il vient

$$\theta = \sum_{1\le j\le m} \theta_j, \quad \textit{avec } \theta_j = \theta\psi_j \in C_c(\Omega_j).$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que le cas $m = 1$ est traité par la proposition 2.1.1. Pour tout $x \in K$, il existe $r(x) > 0$ tel que $K \subset \cup_{x\in K} B(x, r(x))$, où la boule fermée $\bar{B}(x, r(x))$ est incluse dans l'un des Ω_j. Du lemme de Borel-Lebesgue, il vient alors

$$K \subset \cup_{1\le l\le N} B(x_l, r(x_l)) \subset \cup_{1\le l\le N} \bar{B}(x_l, r(x_l)).$$

En posant

$$K_j = \bigcup_{\substack{1\le l\le N,\\ \bar{B}(x_l, r(x_l))\subset\Omega_j}} \bar{B}(x_l, r(x_l)),$$

on trouve que

$$K \subset \cup_{1\le j\le m} K_j, \quad \text{avec } K_j \text{ compact} \subset \Omega_j.$$

D'après la proposition 2.1.1, il existe $\varphi_j \in C_c(\Omega_j; [0,1])$ avec $\varphi_{j|K_j} = 1$. Posons alors

$$\begin{aligned} &\psi_1 = \varphi_1, \\ &\psi_2 = (1-\varphi_1)\varphi_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\psi_m = (1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_{m-1})\varphi_m. \end{aligned}$$

On a évidemment $\psi_j \in C_c(\Omega_j; [0,1])$ et par récurrence sur m l'identité

$$\sum_{1\le j\le m} \psi_j = 1 - \prod_{1\le j\le m} (1-\varphi_j). \tag{2.1.5}$$

En effet (2.1.5) est vérifiée pour $m = 1$ et en supposant l'hypothèse vérifiée pour m, on obtient

$$\sum_{1\le j\le m+1} \psi_j = 1 - \prod_{1\le j\le m} (1-\varphi_j) + \varphi_{m+1} \prod_{1\le j\le m} (1-\varphi_j) = 1 - \prod_{1\le j\le m+1} (1-\varphi_j).$$

Par conséquent, on a

$$K \subset \cup_{1\le j\le m} K_j \subset \cup_{1\le j\le m} \{\varphi_j = 1\} \subset \{\sum_{1\le j\le m} \psi_j = 1\},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

2.2. Théorème de représentation de Riesz sur $\mathbb{R}^d$

Dans la suite, étant donné un espace topologique localement compact séparé X, nous appellerons *mesure borélienne* sur X toute mesure positive définie sur la tribu des boréliens de X, finie sur les compacts.

THÉORÈME 2.2.1. *Soit $L : C_c(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire positive (i.e. telle que $f \geq 0$ implique $Lf \geq 0$; on dit que L est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$). Alors, il existe une tribu $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{R}^d$, contenant la tribu des boréliens, et une unique mesure μ définie sur $\mathcal{M}$ telle que*

(a) *Pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $Lf = \int_X f d\mu$.*
(b) *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $\mu(K) < +\infty$.*
(c) *Pour tout $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V), V\, ouvert \supset E\}$ (régularité extérieure).*
(d) *Pour tout borélien E et pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) < +\infty$,*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K), K \textit{ compact} \subset E\} \qquad (\textit{régularité intérieure}).$$

(e) *Pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$, $A \subset E$ implique $E \in \mathcal{M}$ (la tribu $\mathcal{M}$ est μ-complète).*

Remarquons que (a) a bien un sens car si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, elle est Borel-mesurable et donc l'image réciproque d'un borélien de $\mathbb{C}$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$ donc un élément de $\mathcal{M}$, ce qui assure la mesurabilité de f. En outre, si f est à support compact, l'inégalité $|f| \leq \mathbf{1}_K \sup|f|$ et (b) montrent que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Démontrons d'abord l'unicité. Comme μ doit satisfaire (d) et que les ouverts sont des boréliens, on a pour V ouvert, $\mu(V) = \sup\{\mu(K), K\text{compact} \subset V\}$. La propriété (c) montre alors que μ est déterminée complètement par ses valeurs sur les parties compactes de $\mathbb{R}^d$. Soient μ_1, μ_2 deux mesures positives définies sur une tribu $\mathcal{M}$ contenant les boréliens et vérifiant les propriétés (a,b,c,d,e). Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. De (b) et (c), il vient que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert $V_\epsilon \supset K$ tel que

$$\mu_2(K) \leq \mu_2(V_\epsilon) < \mu_2(K) + \epsilon.$$

Soit $\varphi \in C_c(V_\epsilon; [0,1])$ telle que $\varphi_{|K} = 1$ (cf.proposition 2.1.1). Alors, on a

$$\mu_1(K) = \int_X \mathbf{1}_K d\mu_1 \leq \int_X \varphi d\mu_1 = L\varphi = \int_X \varphi d\mu_2 \leq \int_X \mathbf{1}_{V_\epsilon} d\mu_2 = \mu_2(V_\epsilon) < \mu_2(K) + \epsilon,$$

ce qui implique $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. On obtient donc en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2 l'égalité $\mu_2(K) = \mu_1(K)$.

Nous allons maintenant construire μ et $\mathcal{M}$. Pour V ouvert , on pose

$$\mu(V) = \sup\big\{L\varphi,\ \varphi \in C_c\big(V; [0,1]\big)\big\}, \tag{2.2.1}$$

et on note que comme $L\varphi \in \mathbb{R}_+$, on a $\mu(V) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Bien entendu, si $V_1 \subset V_2$ sont des ouverts, l'inclusion $C_c(V_1) \subset C_c(V_2)$ implique $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Pour $E \subset \mathbb{R}^d$ (quelconque), on définit sa mesure extérieure par (ceci donne la propriété (c) du théorème 2.2.1),

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(V), V\text{ouvert} \supset E\}. \tag{2.2.2}$$

Pour V ouvert, on a $\mu(V) = \mu^*(V)$ car si un ouvert $W \supset V$, on a $\mu(V) \leq \mu(W)$ et par conséquent $\mu^*(V) \leq \mu(V) \leq \mu^*(V)$. Nous ne prouverons pas la σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, mais[2] seulement sur une tribu contenant la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens. On pose également

$$\mathcal{M}_F = \{E \subset X,\ \mu^*(E) < +\infty,\ \mu^*(E) = \sup_{K\text{compact}\subset E} \mu^*(K)\}, \tag{2.2.3}$$

$$\mathcal{M} = \{E \subset X, \forall K\text{compact},\ K \cap E \in \mathcal{M}_F\}. \tag{2.2.4}$$

L'application μ^* est croissante car si $B \supset A$, les ouverts qui contiennent B contiennent aussi A. De plus, si $\mu^*(E) = 0$, alors $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_F$; en effet, si $K \subset E$ est un compact de X, on a $\mu^*(K) = 0$ par monotonie, ce qui donne $E \in \mathcal{M}_F$; en outre $E \in \mathcal{M}$ car si K est un compact $\mu^*(K \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ et donc $K \cap E \in \mathcal{M}_F$ d'après ce qui précède. Ceci implique (e) dans le théorème 2.2.1 car si $A \subset E$ et $\mu^*(E) = 0$, alors $\mu^*(A) = 0$ et $A \in \mathcal{M}$.

Remarquons également la monotonie de L: si $f \leq g \in C_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ alors

$$Lg = L(g - f + f) = L(g - f) + Lf \geq Lf.$$

[2]On peut d'ailleurs démontrer qu'il n'existe pas de mesure positive définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}^d$, coïncidant avec la mesure de volume ordinaire sur les pavés compacts. C'est la raison pour laquelle fut introduite la notion de tribu, afin de limiter le procédé d'extension de la mesure de volume à des ensembles d'abord dans la tribu de Borel, puis dans la tribu complétée, i.e. celle qui est engendrée par les boréliens et les ensembles de mesure nulle.

LEMME 2.2.2. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par $(2.2.1-2)$. Alors μ^* est σ-sous-additive, i.e. si $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}^d$, alors*

$$\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j). \tag{2.2.5}$$

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord des ouverts V_1, V_2 et posons $V = V_1 \cup V_2$. Par définition, on a

$$\mu(V) = \sup_{\varphi\in C_c(V;[0,1])} L\varphi.$$

Si φ est élément de $C_c(V;[0,1])$ et $K = \operatorname{supp}\varphi$, le théorème 2.1.3 montre l'existence de $\theta_j \in C_c(V_j;[0,1]), j = 1, 2$, telles que $\theta_1 + \theta_2 = 1$ sur K. Par conséquent, il vient $\varphi = \theta_1\varphi + \theta_2\varphi$ et donc avec $\varphi_j = \theta_j\varphi$

$$L\varphi = L\varphi_1 + L\varphi_2 \le \sup_{\phi_1\in C_c(V_1;[0,1])} L\phi_1 + \sup_{\phi_2\in C_c(V_1;[0,1])} L\phi_2 = \mu(V_1) + \mu(V_2),$$

ce qui implique $\mu(V_1 \cup V_2) \le \mu(V_1) + \mu(V_2)$. Par récurrence sur n, on obtient immédiatement, pour $V_1, \dots, V_n$ ouverts, l'inégalité

$$\mu(\cup_{1\le k\le n} V_k) \le \sum_{1\le k\le n} \mu(V_k). \tag{2.2.6}$$

Pour démontrer le lemme, on peut supposer que pour tout j, $\mu^*(E_j) < +\infty$, sinon le résultat est immédiat. De (2.2.2), il vient alors, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'existence d'un ouvert $V_{\epsilon,j} \supset E_j$ tel que

$$\mu^*(E_j) \le \mu(V_{\epsilon,j}) < \mu^*(E_j) + \epsilon 2^{-j-1}.$$

Posons $V_\epsilon = \cup_{j\in\mathbb{N}} V_{\epsilon,j}$ et considérons $\varphi \in C_c(V_\epsilon;[0,1])$. Comme le support de φ est compact, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi \in C_c(\cup_{0\le j\le n} V_{\epsilon,j};[0,1])$. Par suite, de la définition et de (2.2.6), il vient,

$$L\varphi \le \mu(\cup_{0\le j\le n} V_{\epsilon,j}) \le \sum_{0\le j\le n} \mu(V_{\epsilon,j}) < \sum_{0\le j\le n} \mu^*(E_j) + \epsilon 2^{-j-1} \le \epsilon + \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j),$$

et par conséquent, comme μ^* est monotone et $\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j \subset V_\epsilon$, on a pour tout $\epsilon > 0$

$$\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) \le \mu^*(V_\epsilon) = \mu(V_\epsilon) = \sup_{\varphi\in C_c(V_\epsilon;[0,1])} L\varphi \le \epsilon + \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j)$$

□

LEMME 2.2.3. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par $(2.2.1-2)$. Alors tout compact de $\mathbb{R}^d$ est élément de $\mathcal{M}_F$ (ce qui implique (b) dans le théorème 2.2.1) et plus précisément, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,*

$$\mu^*(K) = \inf\{L\varphi,\ \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d;[0,1]), \varphi_{|K} \equiv 1\} \tag{2.2.7}$$

DÉMONSTRATION. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d;[0,1]), \varphi_{|K} \equiv 1$ et $1 > \epsilon > 0$. L'ensemble $V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) > 1-\epsilon\}$ est un ouvert contenant K. Si $\psi \in C_c(V_\epsilon;[0,1])$ alors on a

$$(1-\epsilon)\psi \le (1-\epsilon)\mathbf{1}_{V_\epsilon} \le \varphi$$

et par conséquent, d'après la monotonie de L, on obtient

$$\mu^*(K) \le \mu^*(V_\epsilon) = \mu(V_\epsilon) = \sup_{\psi \in C_c(V_\epsilon,[0,1])} L\psi \le (1-\epsilon)^{-1} L\varphi. \tag{2.2.8}$$

Ceci implique que $\mu^*(K) \le L\varphi < +\infty$ et donc, comme $\mu^*(K) = \sup_{L \text{ compact } \subset K} \mu^*(L)$, on obtient que $K \in \mathcal{M}_F$. Par ailleurs, de (2.2.8), il vient également

$$\mu^*(K) \le \inf_{\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,[0,1]),\ \varphi_{|K} \equiv 1} L\varphi. \tag{2.2.9}$$

Pour démontrer l'égalité, on remarque, que puisque $\mu^*(K) < +\infty$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert W_ϵ contenant K tel que $\mu^*(K) \le \mu(W_\epsilon) < \mu^*(K) + \epsilon$. D'après la proposition 2.1.1, il existe $\varphi \in C_c(W_\epsilon;[0,1]), \varphi_{|K} = 1$. Par suite, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$L\varphi \le \mu(W_\epsilon) < \mu^*(K) + \epsilon,$$

ce qui implique

$$\inf_{\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,[0,1]),\ \varphi_{|K} \equiv 1} L\varphi < \mu^*(K) + \epsilon,$$

et le résultat du lemme.

LEMME 2.2.4. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par $(2.2.1-2)$. Alors tout ouvert V vérifie (d) dans le théorème 2.2.1, i.e.*

$$\mu(V) = \sup_{K \text{ compact } \subset V} \mu^*(K). \tag{2.2.10}$$

En particulier, $\mathcal{M}_F$ contient tous les ouverts V tels que $\mu(V) < \infty$.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord $\mu(V) < +\infty$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\varphi_\epsilon \in C_c(V; [0,1])$ telle que

$$\mu(V) - \epsilon < L\varphi_\epsilon \leq \mu(V).$$

Considérant le compact $K_\epsilon = \operatorname{supp} \varphi_\epsilon \subset V$ et W un ouvert contenant K_ϵ, on a $\varphi_\epsilon \in C_c(W; [0,1])$ et donc

$$L\varphi_\epsilon \leq \mu(W) \Longrightarrow L(\varphi_\epsilon) \leq \inf_{W \text{ ouvert } \supset K_\epsilon} \mu(W) = \mu^*(K_\epsilon).$$

Ceci implique, en utilisant aussi la monotonie,

$$\mu(V) - \epsilon < \mu^*(K_\epsilon) \leq \sup_{K \text{ compact } \subset V} \mu^*(K) \leq \mu(V)$$

ce qui est le résultat. En outre, si V est un ouvert tel que $\mu(V) < +\infty$, nous avons démontré

$$\mu(V) = \sup_{K \text{ compact } \subset V} \mu^*(K), \quad \text{i.e. } V \in \mathcal{M}_F.$$

Si $\mu(V) = +\infty$, on trouve une suite $\varphi_k \in C_c(V; [0,1])$ telle que $L\varphi_k \geq k$. Considérant le compact $K_k = \operatorname{supp} \varphi_k \subset V$ et W un ouvert contenant K_k, on a $\varphi_k \in C_c(W; [0,1])$ et donc

$$L\varphi_k \leq \mu(W) \Longrightarrow L(\varphi_k) \leq \inf_{W \text{ ouvert } \supset K_k} \mu(W) = \mu^*(K_k).$$

Ceci implique $\lim_k \mu^*(K_k) = +\infty$ et (2.2.10) dans ce cas. □

LEMME 2.2.5. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par $(2.2.1-2)$. Soit $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}_F$, alors*

$$\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j). \tag{2.2.11}$$

Si de plus $\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) < +\infty$, alors $\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathcal{M}_F$.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que pour K_1, K_2 compacts disjoints, on a

$$\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2). \tag{2.2.12}$$

En effet, on a $K_1 \subset K_2^c$ ouvert et on peut considérer $\varphi \in C_c(K_2^c; [0,1])$ telle que $\varphi_{|K_1} = 1$. D'après le lemme 2.2.3, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\psi_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^d; [0,1])$ telle que $\psi_{\epsilon|K_1 \cup K_2} = 1$ et vérifiant

$$\mu^*(K_1 \cup K_2) \le L\psi_\epsilon < \mu^*(K_1 \cup K_2) + \epsilon.$$

De plus, on a $\varphi\psi_{\epsilon|K_1} = 1$ et $(1-\varphi)\psi_{\epsilon|K_2} = 1$. Par conséquent, on obtient pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mu^*(K_1) + \mu^*(K_2) \overset{\text{lemme 2.2.3}}{\le} L(\varphi\psi_\epsilon) + L((1-\varphi)\psi_\epsilon) = L(\psi_\epsilon) &< \mu^*(K_1 \cup K_2) + \epsilon \\ &\underset{\text{lemme 2.2.2}}{\le} \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2) + \epsilon,\end{aligned}$$

ce qui donne (2.2.12). Revenons à la preuve du lemme. Comme le lemme 2.2.2 fournit une inégalité, si $\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) = +\infty$, on obtient le résultat. Supposons donc $\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) < +\infty$ et considérons $\epsilon > 0$. Comme E_j appartient à $\mathcal{M}_F$, on peut trouver des compacts $K_{\epsilon,j} \subset E_j$ tels que

$$\mu^*(E_j) - \epsilon 2^{-j-1} < \mu^*(K_{\epsilon,j}) \le \mu^*(E_j).$$

Par conséquent, on a, pour tout entier n

$$\begin{aligned}\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j) \overset{\text{monotonie}}{\ge} \mu^*\Big(\underbrace{\cup_{0\le j\le n} K_{\epsilon,j}}_{\substack{\text{compacts} \\ \text{deux à deux disjoints}}}\Big) \overset{\substack{\text{(2.2.12) et} \\ \text{récurrence sur } n}}{=} &\sum_{0\le j\le n} \mu^*(K_{\epsilon,j}) \\ &\ge -\epsilon + \sum_{0\le j\le n} \mu^*(E_{,j}),\end{aligned}$$

ce qui donne le première partie du lemme. Montrons maintenant que $E = \cup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathcal{M}_F$. Comme la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j) = \mu^*(E)$ est convergente, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que

$$\mu^*(E) - \epsilon \le \sum_{0\le j\le N_\epsilon} \mu^*(E_j) \le \epsilon + \sum_{0\le j\le N_\epsilon} \mu^*(K_{\epsilon,j}) = \epsilon + \mu^*(\overbrace{\cup_{0\le j\le N_\epsilon} K_{\epsilon,j}}^{\text{compact } \subset E}).$$

Par conséquent, on a

$$\mu^*(E) \le 2\epsilon + \mu^*(\cup_{0\le j\le N_\epsilon} K_{\epsilon,j}) \le 2\epsilon + \sup_{K \text{ compact } \subset E} \mu^*(K) \overset{\text{monotonie}}{\le} 2\epsilon + \mu^*(E),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.5.

LEMME 2.2.6. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par $(2.2.1-2)$. Soient $E, A_1, A_2 \in \mathcal{M}_F$. Alors*

(i) *pour tout $\epsilon > 0$, il existe K_ϵ compact et V_ϵ ouvert tels que*

$$K_\epsilon \subset E \subset V_\epsilon, \quad \text{et} \quad \mu(V_\epsilon \backslash K_\epsilon) < \epsilon,$$

(ii) $A_1 \backslash A_2,\ A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}_F$.

DÉMONSTRATION. Par définition de $\mathcal{M}_F$, on a

$$\mu^*(E) < +\infty, \qquad \inf_{V \text{ ouvert } \supset E} \mu(V) = \mu^*(E) = \sup_{K \text{ compact } \subset E} \mu^*(K).$$

Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset E$ et un ouvert $V_\epsilon \supset E$ tels que

$$\mu^*(E) - \epsilon/3 < \mu^*(K_\epsilon) \leq \mu^*(E) \leq \mu(V_\epsilon) < \mu^*(E) + \epsilon/3.$$

Comme $V_\epsilon \backslash K_\epsilon$ est un ouvert tel que $\mu(V_\epsilon \backslash K_\epsilon) < +\infty$, il vient du lemme 2.2.4 que $V_\epsilon \backslash K_\epsilon \in \mathcal{M}_F$. Les lemmes 2.2.5 et 2.2.3 donnent alors

$$\mu^*(V_\epsilon \backslash K_\epsilon) + \mu^*(K_\epsilon) = \mu(V_\epsilon) \leq \mu^*(E) + \epsilon/3 \Longrightarrow \mu^*(V_\epsilon \backslash K_\epsilon) \leq 2\epsilon/3,$$

ce qui prouve (i). En utilisant ce résultat, on trouve pour $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_F$

$$K_j \text{ compact} \subset A_j \subset V_j \text{ ouvert}, \quad \mu(V_j \backslash K_j) < \epsilon.$$

Comme $A_1 \backslash A_2 \subset V_1 \backslash K_2 \subset (V_1 \backslash K_1) \cup (K_1 \backslash V_2) \cup (V_2 \backslash K_2)$, le lemme 2.2.2 donne

$$\mu^*(A_1 \backslash A_2) \leq 2\epsilon + \mu^*(K_1 \backslash V_2),$$

et comme $K_1 \backslash V_2$ est un compact $\subset A_1 \backslash A_2$, on trouve que $A_1 \backslash A_2 \in \mathcal{M}_F$. En outre, l'égalité $A_1 \cup A_2 = (A_1 \backslash A_2) \cup A_2$ et le lemme 2.2.5 donnent $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}_F$. De plus, l'identité

$$A_1 \cap A_2 = \underbrace{A_1}_{\in \mathcal{M}_F} \backslash \underbrace{(A_1 \backslash A_2)}_{\in \mathcal{M}_F}$$

et le début de cette preuve montrent que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}_F$. $\square$

LEMME 2.2.7. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par* $(2.2.1-2)$*. Alors, $\mathcal{M}$ définie en* $(2.2.4)$ *est une tribu sur $\mathbb{R}^d$ contenant les boréliens.*

DÉMONSTRATION. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}$. Alors on a

$$A^c \cap K = K \backslash A = K \backslash (A \cap K),$$

et comme $K \in \mathcal{M}_F$ (lemme 2.2.3) et $A \cap K \in \mathcal{M}_F$ (hypothèse), il vient, d'après le lemme 2.2.6, $A^c \cap K \in \mathcal{M}_F$ ce qui implique $A^c \in \mathcal{M}$. De plus si $(A_j)_{j \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ et K est un compact, on a

$$\begin{aligned}(\cup_{j\geq 1} A_j) \cap K &= \cup_{j \geq 1}(A_j \cap K) \\ &= A_1 \cap K \\ &\quad \cup (A_2 \cap K) \backslash (A_1 \cap K) \\ &\quad \cup (A_3 \cap K) \backslash \big[(A_2 \cap K) \cup (A_1 \cap K)\big] \\ &\quad \dots \\ &\quad \cup (A_n \cap K) \backslash \big[\cup_{1 \leq j < n}(A_j \cap K)\big] \\ &\quad \dots\end{aligned}$$

et comme $A_j \cap K \in \mathcal{M}_F$ par hypothèse, on déduit du lemme 2.2.6 que pour tout n, $A_n \cap K) \backslash \big[\cup_{1 \leq j < n}(A_j \cap K)\big] \in \mathcal{M}_F$. Or ces ensembles sont deux à deux disjoints de réunion $A \cap K$ de mesure finie car $\mu(A \cap K) \leq \mu(K) < +\infty$. On peut donc appliquer le lemme 2.2.5 qui donne $A \cap K \in \mathcal{M}_F$ et donc $A \in \mathcal{M}$. En outre, si F est un fermé, $F \cap K$ est un compact et donc est élément de $\mathcal{M}_F$, ce qui implique que $F \in \mathcal{M}$. En particulier $\mathbb{R}^d$ appartient à $\mathcal{M}$. Finalement, $\mathcal{M}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^d$ qui contient les fermés et donc les boréliens. $\square$

LEMME 2.2.8. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par* $(2.2.1-2)$*. Alors, avec $\mathcal{M}_F$ et $\mathcal{M}$ définies en* $(2.2.3-4)$*, on a*

$$\mathcal{M}_F = \{E \in \mathcal{M},\ \mu^*(E) < +\infty\}.$$

Ceci implique la propriété (d) *du théorème* 2.2.1 *pour les éléments de $\mathcal{M}$ de mesure finie.*

DÉMONSTRATION. Soit $E \in \mathcal{M}_F$ et K un compact. Les lemmes 2.2.3–6 montrent que $K, E \cap K \in \mathcal{M}_F$, ce qui implique que $E \in \mathcal{M}$. Réciproquement, si $E \in \mathcal{M}$ et $\mu^*(E) < \infty$, il existe V ouvert $\supset E$ tel que $\mu(V) < \infty$ et d'après le lemme 2.2.4, $V \in \mathcal{M}_F$. D'après le lemme 2.2.6, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset V$ tel que $\mu(V \backslash K) < \epsilon$. Comme $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ par hypothèse, il existe un compact $L \subset E \cap K$ tel que

$$\mu^*(E \cap K) - \epsilon < \mu^*(L) \leq \mu^*(E \cap K).$$

Comme on a $E \subset \underbrace{(E \cap K)}_{\in \mathcal{M}_F} \cup \underbrace{(V \backslash K)}_{\in \mathcal{M}_F}$, il vient du lemme 2.2.5,

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap K) + \mu^*(V \backslash K) < \mu^*(L) + 2\epsilon \leq \mu^*(E \cap K) + 2\epsilon \leq \mu^*(E) + 2\epsilon$$

ce qui implique $E \in \mathcal{M}_F$. $\square$

LEMME 2.2.9. *Soit L une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ et μ, μ^* définies respectivement sur les ouverts et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ par* $(2.2.1-2)$. *Alors, avec $\mathcal{M}$ définie en* (2.2.4),

(i) *μ^* est une mesure sur $\mathcal{M}$,*
(ii) *$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $L\varphi = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(E_j)_{j \geq 1}$ une suite d'élements de $\mathcal{M}$, deux à deux disjoints. S'il existe $j_0 \geq 1$ tel que $\mu^*(E_{j_0}) = +\infty$, on obtient le résultat pour la σ-additivité car $\mu^*(E_{j_0}) \leq \mu^*(\cup_{j \geq 1} E_j)$. Supposons donc que $\forall j \geq 1, \mu^*(E_j) < \infty$. D'après le lemme 2.2.8, $\forall j \geq 1, E_j \in \mathcal{M}_F$ et le lemme 2.2.5 donne le résultat (i). Pour obtenir (ii), on peut supposer φ réelle et se limiter à démontrer $L\varphi \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu$ car nous en déduirons $-L(\varphi) = L(-\varphi) \leq \int_{\mathbb{R}^d} -\varphi d\mu = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu$. Notons par ailleurs que,

$$C_c(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}^1(\mu),$$

car pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

$$|\varphi| \leq \sup |\varphi| \mathbf{1}_{\operatorname{supp} \varphi} \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

car $\mu(\operatorname{supp} \varphi) < \infty$, puisque $\operatorname{supp} \varphi$ est compact; par ailleurs φ est mesurable car $\mathcal{M}$ contient les boréliens. Soit donc φ réelle $\in C_c(\mathbb{R}^d)$ à support compact K telle que $\varphi(\mathbb{R}^d) \subset [a, b]$ et soit $\epsilon > 0$. Considérons $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ des réels tels que

$$y_0 < a < y_1 < \cdots < y_n = b, \quad 0 < y_{j+1} - y_j < \epsilon.$$

On pose

$$E_j = \{x \in K, y_{j-1} < \varphi(x) \leq y_j\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Les E_j sont des boréliens deux à deux disjoints de réunion K. Par suite, il existe des ouverts $V_j \supset E_j$ tels que

$$\mu(E_j) \leq \mu(V_j) < \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}.$$

Considérons les ouverts

$$W_j = V_j \cap \{x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) < y_j + \epsilon\} \supset E_j.$$

On a les inclusions

$$\mu(W_j) \leq \mu(V_j) < \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}, \quad K = \cup_{1\leq j\leq n \subset} E_j \subset \cup_{1\leq j\leq n \subset} W_j.$$

Par conséquent du théorème 2.1.2 sur les partitions de l'unité, il vient l'existence de fonctions $\psi_j \in C_c(W_j; [0,1])$ telles que, sur K, $\sum_{1\leq j\leq n} \psi_j = 1$, ce qui implique $\varphi = \sum_{1\leq j\leq n} \psi_j \varphi$. Du lemme 2.2.3, il vient alors

$$\mu(K) \leq L(\sum_{1\leq j\leq n} \psi_j) = \sum_{1\leq j\leq n} L\psi_j,$$

et comme $\psi_j\varphi \leq (y_j + \epsilon)\psi_j$ et $y_j - \epsilon < \varphi(x)$ pour $x \in E_j$, on obtient

$$\begin{aligned} L\varphi = L(\sum_{1\leq j\leq n} \psi_j\varphi) \leq L(\sum_{1\leq j\leq n} (y_j+\epsilon)\psi_j) &= \sum_{1\leq j\leq n} (y_j+\epsilon)L\psi_j \\ &= \sum_{1\leq j\leq n} (|a| + y_j + \epsilon)L\psi_j - |a| \sum_{1\leq j\leq n} L\psi_j \\ &\leq \sum_{1\leq j\leq n} (|a| + y_j + \epsilon)\mu(W_j) - |a|\mu(K) \\ &\leq \sum_{1\leq j\leq n} (|a| + y_j + \epsilon)(\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}) - |a|\mu(K). \end{aligned}$$

Il vient par conséquent

$$\begin{aligned} L\varphi \leq \sum_{1\leq j\leq n} (|a| + y_j + \epsilon)(\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}) - |a| \sum_{1\leq j\leq n} \mu(E_j) \\ &= \epsilon|a| + \sum_{1\leq j\leq n} (y_j+\epsilon)\left(\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}\right) \\ &\leq \epsilon|a| + \sum_{1\leq j\leq n} \int_{E_j} (\varphi + 2\epsilon) d\mu + \epsilon(b+\epsilon) \\ &\leq \epsilon(|a| + b + \epsilon) + \int_X \varphi d\mu + \sum_{1\leq j\leq n} 2\epsilon\mu(K) \end{aligned}$$

et donc $L\varphi \le \int_X \varphi d\mu$. $\square$

Pour achever la démonstration du théorème 2.2.1, il reste à établir la propriété (d) pour les boréliens (nous l'avons déjà fait pour les ouverts et les $E \in \mathcal{M}$ tels que $\mu(E) < \infty$).

Remarques 2.2.10.

(i) Le théorème de représentation de Riesz est vrai en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par un espace topologique localement compact et séparé. Il faut alors démontrer les théorèmes de partition de l'unité. Néanmoins, dans ce cas la propriété (d) de régularité intérieure n'est pas vraie pour tous les boréliens, mais seulement pour les ouverts (et les $E \in \mathcal{M}$ tels que $\mu(E) < \infty$).

(ii) Le théorème 2.2.1 est vrai en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par un espace topologique localement compact, séparé et tel que tout ouvert soit σ-compact (i.e. réunion dénombrable de compacts).

(iii) Notons également qu'une forme linéaire positive sur $C_c(X)$ est nécessairement continue car si $\varphi \in C_c(X)$, $\operatorname{supp} \varphi = K$ compact, et si $\chi \in C_c(X; [0,1])$, $\chi_{|K} = 1$, on a

$$L(\chi \sup |\varphi|) \ge L\varphi \ge L(-\chi \sup |\varphi|)$$

et par conséquent $|L\varphi| \le (L\chi) \sup |\varphi|$ ce qui exprime la continuité de L.

Revenons à la propriété (d).

LEMME 2.2.11. *Considérons pour un espace topologique X σ-compact l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ défini ci-dessus. Soit $E \in \mathcal{M}$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe*

$$F \textit{ fermé} \subset E \subset V \textit{ouvert}, \quad \mu(V \backslash F) < \epsilon.$$

DÉMONSTRATION. On considère une suite de compacts telle que $X = \cup_{n \ge 1} K_n$. Alors on a

$$\mu(K_n \cap E) \underset{\text{monotonie}}{\le} \mu(K_n) \underset{\substack{\text{(b) déjà}\\ \text{démontré}}}{<} \infty.$$

Par conséquent, d'après (2.2.2), il existe un ouvert $V_n \supset K_n \cap E$ tel que

$$\mu(K_n \cap E) \le \mu(V_n) < \mu(K_n \cap E) + \epsilon 2^{-n-2}.$$

Par suite, comme $E, V_n, K_n \in \mathcal{M}$, on a $\mu(V_n \backslash (K_n \cap E)) \le \epsilon 2^{-n-2}$ et, avec $V = \cup_{n \ge 1} V_n \supset E$,

$$\mu(V \backslash E) = \mu(\cup_{n\ge1}(V_n \backslash E)) \le \mu\Big(\cup_{n\ge1}\big(V_n \backslash (E \cap K_n)\big)\Big) \le \sum_{n\ge1} \mu(V_n \backslash (E \cap K_n)) \le \epsilon/4.$$

En appliquant ceci à E^c, on trouve un ouvert $W \supset E^c$ tel que $\mu(W\backslash E^c) \leq \epsilon/4$ et on a finalement

$$F = W^c \text{ fermé} \subset E \subset V, \quad \mu(V\backslash E) \leq \epsilon/4, \quad \mu(E\backslash F) = \mu(W\backslash E^c) \leq \epsilon/4$$

ce qui implique le résultat. □

Si E est un borélien de mesure infinie, il existe

$$F_1 \text{ fermé} \subset E \subset V_1 \text{ ouvert}, \quad \mu(V_1\backslash F_1) < 1.$$

Comme

$$\mu(E) = \mu(E\backslash F_1) + \mu(F_1) \leq 1 + \mu(F_1)$$

on a $\mu(F_1) = +\infty$. Considérons maintenant le fermé $F_1 = \cup_{n\geq 1}(F_1 \cap K_n)$. Alors, de la proposition 1.4.2 (b), il vient

$$\mu(\underbrace{F_1 \cap (\cup_{1\leq j\leq n} K_j)}_{L_n \text{ compact}\subset E}) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} \mu(F_1) = +\infty,$$

i.e. $\lim_n \mu(L_n) = +\infty$, ce qui donne la propriété (d) du théorème 2.2.1, dont la démonstration est maintenant terminée.

2.3. Rappels sur l'intégrale de Riemann

Nous ne souhaitons pas reprendre ici une construction détaillée de l'intégrale de Riemann, mais simplement montrer que l'on peut "intégrer" des fonctions continues à support compact, ce qui est le seul élément utilisé dans notre construction de la mesure de Lebesgue.

Proposition 2.3.1. *Soient $a \leq b$ des nombres réels. On note $C([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Pour $f \in C([a,b])$, il existe une et une seule fonction différentiable F définie sur $[a,b]$ telle que*

$$F(a) = 0, \quad \forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x). \tag{2.3.1}$$

On notera alors l'unique solution de (2.3.1) *par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{2.3.2}$$

L'application définie sur $C([a,b])$ par $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire positive. De plus en posant pour $f \in C([a,b])$, $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$, on trouve la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt, \quad \textit{pour } f \in C(I), \textit{ où } I \textit{ est un intervalle contenant } a,b,c.$$

Si $f \in C_c(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ on pose $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$

DÉMONSTRATION. Remarquons que (2.3.1) implique, d'après le théorème des accroissements finis, que

$$|F(x)| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{2.3.3}$$

Montrons d'abord l'unicité. Si F, G sont différentiables sur $[a,b]$ et vérifient (2.3.1), alors $(F-G)' = 0$ sur $[a,b]$ et le théorème des accroissements finis implique que $\forall x \in [a,b]$, $F(x) - G(x) = F(a) - G(a) = 0$. Remarquons en outre que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe F_n vérifiant (2.3.1), alors les suites F_n, F_n' convergent uniformément vers F, f, et F est différentiable avec $F' = f$. En effet, d'après (2.3.3), on a

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_{n+p}(x) - F_n(x)| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|,$$

ce qui donne la convergence uniforme de la suite F_n vers une fonction $F \in C([a,b])$ telle que $F(a) = 0$. On a, pour $x, x+h \in [a,b]$

$$F_n(x+h) - F_n(x) = f_n(x)h + \big(f_n(x+\theta_n h) - f_n(x)\big)h,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}|F_n(x+h)-F_n(x)-f_n(x)h| &\le |h||f_n(x+\theta_n h)-f(x+\theta_n h)+f(x+\theta_n h)-f(x)+f(x)-f_n(x)| \\ &\le |h|\Big[2\,\|f_n - f\|_{C([a,b])} + \sup_{|t|\le|h|} |f(x+t) - f(x)|\Big],\end{aligned}$$

ce qui donne

$$|F_n(x+h) - F_n(x) - f_n(x)h| \le |h|\big[\epsilon_n + \omega(h)\big], \quad \text{avec } \lim_n \epsilon_n = 0,\ \lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

On obtient donc $|F(x+h) - F(x) - f(x)h| \le |h|\omega(h)$ et par suite la différentiabilité de F avec $F' = f$. Comme (2.3.1) est trivialement vérifié pour des fonctions affines par morceaux et que celles-ci permettent d'approcher uniformément les fonctions continues sur $[a,b]$, on en déduit l'existence. On notera alors l'unique solution de (2.3.1) par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On obtient immédiatement que, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in C([a,b])$

$$\int_a^x \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt = \alpha \int_a^x f(t)dt + \beta \int_a^x g(t)dt,$$

car si F, G sont solutions de (2.3.1) pour f, g alors $\alpha F + \beta G$ est solution de (2.3.1) pour $\alpha f + \beta g$. En outre si $f \geq 0$, alors $F' = f \geq 0$ et $F(x) \geq F(a) = 0$ pour $x \in [a,b]$. De plus en posant pour $f \in C([a,b])$, $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$, on trouve la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt, \quad \text{pour } f \in C(I), \text{ où } I \text{ est un intervalle contenant } a, b, c.$$

En effet si $a \leq b \leq x$, en posant

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^x f(t)dt,$$

on a $F'(x) = f(x) = G'(x), F(b) = G(b)$, d'où $F(x) = G(x)$. Pour $a \leq x \leq b$, on a

$$H(b) = \int_a^b f(t)dt - \int_x^b f(t)dt, \quad H'(b) = f(b) - f(b) = 0,$$

et donc $H(b) = H(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x)$, qed. En particulier, si $f \in C_c(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ on pose

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

et on montre en utilisant la relation de Chasles que si $\operatorname{supp} f \subset [a', b']$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a'}^{b'} f(t)dt.$$

$\square$

Ce qui précède montre qu'il n'est pas nécessaire de développer une théorie difficile pour intégrer les fonctions continues à support compact d'une variable réelle. Il en va de même pour l'intégration des fonctions continues à support compact de d variables réelles.

Proposition 2.3.2. *Soit $m \geq 1$ un entier naturel, et $C_c(\mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions continues à support compact à valeurs complexes. Il existe une et une seule forme linéaire positive définie sur $C_c(\mathbb{R}^m)$ telle que, pour $f(x) = \prod_{1\leq j\leq m} f_j(x_j)$, $f_j \in C_c(\mathbb{R})$, on ait*

$$Lf = \prod_{1\leq j\leq m} \int f_j(x_j)dx_j. \tag{2.3.4}$$

On notera

$$Lf = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx. \tag{2.3.5}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^m$, et tout $f \in C_c(\mathbb{R}^m)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx. \tag{2.3.6}$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'existence pour $m \geq 2$. Il suffit de poser

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x')dx_1 \right) dx',$$

ce qui a un sens si l'on suppose définie l'intégrale des fonctions continues à support compact en $m-1$ dimensions car, en considérant

$$g(x') = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x')dx_1$$

on trouve que g est continue à support compact puisque f est continue à support compact et que (2.3.3) implique

$$|g(x') - g(y')| \leq \sup_{x_1} |f(x_1, x') - f(x_1, y')| \operatorname{diam}(\operatorname{supp} f).$$

Par ailleurs, la propriété (2.3.4) ainsi que la linéarité et la positivité sont trivialement vérifiées. Pour l'unicité, nous utiliserons le lemme suivant.

lemme 2.3.3. *Soit $m \geq 1$ un entier naturel. Alors l'espace vectoriel engendré par $\otimes_{1\leq j\leq m} C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $C_c(\mathbb{R}^m)$.*

Démonstration. On remarque d'abord que

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1 - |t-j|)_+$$

car cette fonction est 1-périodique et pour $t \in [0,1[$, la condition $|t-j| < 1$ implique

$$\max(0, j-1) \leq t < \min(1, j+1) \Longrightarrow 0 \leq j \leq 1,$$

ce qui donne $\sum_{j \in \mathbb{Z}, |t-j| \leq 1} (1 - |t-j|)_+ = (1-t) + \big(1 - (1-t)\big) = 1$. De même, en posant $\varphi(t) = (1 - |t|)_+$ et

$$\Phi(t_1, \dots, t_m) = \prod_{1 \leq l \leq m} \varphi(t_l)$$

on a

$$1 = \prod_{1 \leq l \leq m} \sum_{j_l \in \mathbb{Z}} \varphi(t_l - j_l) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \Phi(T - j), \text{ avec } T = (t_1, \dots t_m).$$

Par suite pour $\epsilon > 0$, $T \in \mathbb{R}^m$, $k = \epsilon j \in \epsilon \mathbb{Z}^m$ on a, en posant $\Phi_k(T) = \Phi\big(\epsilon^{-1}(T - \epsilon j)\big)$

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \Phi(\epsilon^{-1} T - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \Phi\big(\epsilon^{-1}(T - \epsilon j)\big) = \sum_{k \in \epsilon \mathbb{Z}^m} \Phi_k(T),$$

avec $\Phi_k \in C_c(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp} \Phi_k = \{t, \|t - k\|_\infty \leq \epsilon\}$ (ici pour $t \in \mathbb{R}^m$, $\|t\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |t_j|$). Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^m)$. Alors, comme le support de f est compact, les sommes suivantes sont finies et l'on a

$$f(t) = \sum_{k \in \epsilon \mathbb{Z}^m} \Phi_k(t)\big(f(t) - f(k)\big) + \sum_{k \in \epsilon \mathbb{Z}^m} \Phi_k(t) f(k).$$

Comme on a

$$\sum_{k \in \epsilon \mathbb{Z}^m} \Phi_k(t) |f(t) - f(k)| \leq \sum_{k \in \epsilon \mathbb{Z}^m} \Phi_k(t) \sup_{\|t-s\| \leq \epsilon} |f(t) - f(s)| = \sup_{\|t-s\| \leq \epsilon} |f(t) - f(s)|,$$

la continuité uniforme de f implique la convergence uniforme de $\sum_{k \in \epsilon \mathbb{Z}^m} \Phi_k(t) f(k)$ vers f. Or la fonction Φ_k est un produit tensoriel de fonctions continues à support compact d'une variable, ce qui achève la preuve du lemme.

L'unicité dans la proposition 2.3.2 est alors due à la linéarité et à la continuité de L, elle-même conséquence de la positivité. En effet, si $f \in C_c(\mathbb{R}^m)$ avec $\operatorname{supp} f \subset \{\|x\|_\infty \leq R\}$, on a, si $\psi_R \in C_c(\mathbb{R}^m)$ est identiquement égale à 1 sur $\{\|x\|_\infty \leq R\}$

$$L(f + \psi_R \sup |f|) \geq 0 \Longrightarrow Lf \geq -\sup |f| L(\psi_R), \text{ et de même } L(-f) \geq -\sup |f| L(\psi_R),$$

soit $|Lf| \leq L(\psi_R) \sup |f|$, ce qui implique la continuité. Noter que l'on peut prendre la fonction

$$\psi_R = \sum_{\|k\|_\infty \leq 1+R} \Phi_k.$$

Soient L_1, L_2 des formes linéaires vérifiant les hypothèses de la proposition 2.3.2 et soit $f \in C_c(\mathbb{R}^m)$. D'après le lemme 2.3.3, f est limite uniforme d'une suite f_n appartenant à l'espace vectoriel engendré par les produits tensoriels sur lequel L_1 et L_2 coïncident; il vient

$$(L_1 - L_2)(f) = \lim_n (L_1 - L_2)(f_n) = \lim_n 0 = 0.$$

La propriété (2.3.6) est une conséquence de l'unicité et de cette propriété pour $m = 1$, immédiate d'après la proposition 2.3.1.

2.4. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

THÉORÈME 2.4.1. *Soit d un entier naturel ≥ 1. Il existe une mesure m_d positive complète régulière définie sur une tribu $\mathcal{L}_d$ sur $\mathbb{R}^d$ stable par translation contenant les boréliens telle que*

(a) $m_d \left(\prod_{1 \leq j \leq d} [a_j, b_j] \right) = \prod_{1 \leq j \leq d} (b_j - a_j)$, *pour* $a_j \leq b_j$.
(b) $\forall E \in \mathcal{L}_d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad m_d(E + x) = m_d(E)$.

Si μ est une mesure positive définie sur les boréliens $\mathcal{B}_d$, finie sur les compacts, invariante par translation (i.e. vérifiant (b)*) et telle que $\mu([0,1]^d) = 1$, alors $\mu = m_d$ sur $\mathcal{B}_d$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la forme linéaire positive définie sur $C_c(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 2.3.2: à $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on associe son "intégrale de Riemann" notée $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx$. On peut appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 2.2.1) qui fournit un espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, m_d)$ vérifiant les propriétés de ce théorème. Démontrons la propriété (a) du théorème 2.4.1, en supposant d'abord $a_j < b_j$ pour tout $1 \leq j \leq d$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\forall j \in \{1, \ldots, d\}, a_j + \epsilon < b_j - \epsilon$ et $\varphi_j \in C_c(\mathbb{R}; [0,1])$ telle que

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_j \in [a_j + \epsilon, b_j - \epsilon], \\ \text{affine} & \text{pour } x_j \in [a_j, b_j] \backslash [a_j + \epsilon, b_j - \epsilon], \\ 0 & \text{pour } x_j \notin]a_j, b_j[. \end{cases}$$

On considère la fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d; [0,1])$ définie par $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_d(x_d)$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \prod_{1 \leq j \leq d} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x_j) dx_j = \prod_{1 \leq j \leq d} (b_j - a_j - 2\epsilon + \epsilon).$$

En posant $P = \prod_{1 \leq j \leq d} [a_j, b_j]$ et pour k entier $> k_0 = \frac{2}{\min_{1 \leq j \leq d}(b_j - a_j)}$,

$$P_k = \prod_{1 \leq j \leq d} [a_j + \frac{1}{k}, b_j - \frac{1}{k}],$$

on obtient pour $\epsilon = 1/k$,

$$m(P_k) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{P_k} dm \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi dm \leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_P dm = m(P),$$

ce qui donne en utilisant la proposition 1.4.2(b) et $\overset{0}{P} = \cup_{k>k_0} P_k$ (réunion croissante)

$$m(\overset{0}{P}) = \lim_k m(P_k) \leq \lim_k \prod_{1\leq j\leq d} (b_j - a_j - \frac{1}{k}) = \prod_{1\leq j\leq d} (b_j - a_j) \leq m(P). \tag{2.4.1}$$

Ceci implique également que

$$m(\{x_1 = a_1\}) = 0 \tag{2.4.2}$$

car pour $\epsilon > 0$ et $M > 0$, on a

$$m\left(\{(x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, |x_1 - a_1| < \epsilon/2, \|x'\|_\infty < M/2\}\right) \leq \epsilon M^{d-1},$$

d'où l'on déduit

$$m\left(\{(x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, x_1 = a_1, \|x'\|_\infty < M\}\right) = 0,$$

et par réunion dénombrable $m(\{x_1 = a_1\}) = 0$. Comme la différence $P\backslash\overset{0}{P}$ est incluse dans une réunion finie d'hyperplans, la propriété (a) est une conséquence de (2.4.1–2). En utilisant le lemme 2.2.11 on obtient le résultat suivant.

Lemme 2.4.2. *On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, m_d)$ fourni par le théorème 2.2.1 à partir de la forme linéaire positive donnée par l'intégrale de Riemann des fonctions continues à support compact. Soit E une partie de $\mathbb{R}^d$. Alors E appartient à $\mathcal{L}_d$ si et seulement s'il existe A de type F_σ (i.e. réunion dénombrable de fermés), B de type G_δ (i.e. intersection dénombrable d'ouverts), tels que*

$$A \subset E \subset B, \quad et \quad m_d(B\backslash A) = 0.$$

Démontrons ce lemme. Soit $E \in \mathcal{L}_d$. D'après le lemme 2.2.11, pour tout $j \geq 1$ entier, il existe F_j fermé et V_j ouvert tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $m_d(V_j\backslash F_j) \leq 1/j$. On remarque alors que

$$A = \cup_{j\geq 1} F_j \subset E \subset \cap_{j\geq 1} V_j = B$$

et pour tout $j \geq 1$, $m_d(B\backslash A) \leq m_d(V_j \backslash F_j) \leq 1/j$ ce qui implique $m_d(B\backslash A) = 0$ et la première partie du lemme. Réciproquement, si (2.4.1) est vérifiée, on a

$$E = (E\backslash A) \cup A, \quad E\backslash A \subset B\backslash A$$

et comme la tribu $\mathcal{L}_d$ est complète, $E\backslash A \in \mathcal{L}_d$ comme sous-ensemble du borélien de mesure nulle $B\backslash A$. Comme $\mathcal{L}_d$ contient les boréliens, $A \in \mathcal{L}_d$ et finalement $E \in \mathcal{L}_d$. $\square$

Démontrons maintenant la propriété (b) du théorème 2.4.1. Soit Kcompact $\subset V$ ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\chi \in C_c(V;[0,1])$ telle que $\chi_{|K} = 1$. On a

$$m(K) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi dm \leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_V dm = m(V),$$

et la propriété de régularité intérieure (d) du théorème 2.2.1 implique

$$m(V) = \sup_{K\text{compact}\subset V} m(K) = \sup_{\chi \in C_c(V;[0,1])} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)dx. \tag{2.4.3}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}^d$, on note τ_θ la translation de vecteur θ et l'on remarque que,

$$V + \theta = \tau_\theta(V) = \tau_{-\theta}^{-1}(V) \tag{2.4.4}$$

ce qui implique que $\tau_\theta(V)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. On a alors

$$\begin{aligned} m(V+\theta) &= \sup_{\chi \in C_c(V+\theta;[0,1])} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)dx \\ &= \sup_{\psi \in C_c(V;[0,1])} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x+\theta)dx = \sup_{\psi \in C_c(V;[0,1])} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = m(V). \end{aligned}$$

En appliquant (2.4.4) aux boréliens, on remarque que la tribu des boréliens est stable par translation. En utilisant la régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, on trouve, pour E borélien et $\theta \in \mathbb{R}^d$,

$$m(E+\theta) = \inf_{W\text{ouvert}\supset E+\theta} m(W) = \inf_{V\text{ouvert}\supset E} m(V+\theta) = \inf_{V\text{ouvert}\supset E} m(V) = m(E). \tag{2.4.5}$$

Considérons maintenant $E \in \mathcal{L}_d$. D'après le lemme 2.4.2, il existe A de type F_σ, B de type G_δ tels que $A \subset E \subset B$ et $m(B\backslash A) = 0$. Ceci implique, pour $\theta \in \mathbb{R}^d$, que

$$A + \theta \subset E + \theta \subset B + \theta,$$

et en outre $A+\theta$ est de type F_σ car, τ_θ étant bijective et $\tau_{-\theta}$ continue, on a

$$\tau_\theta(\cup_{n\in\mathbb{N}}F_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\tau_\theta(F_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\tau_{-\theta}^{-1}(F_n)}_{\text{fermé}}.$$

On démontre de même que $B+\theta$ est de type G_δ et en utilisant (2.4.5), il vient

$$m\big(\tau_\theta(B)\backslash\tau_\theta(A)\big) = m\big(\tau_\theta(B\backslash A)\big) = m(B\backslash A) = 0,$$

ce qui implique (lemme 2.4.2) que $E+\theta$ appartient à $\mathcal{L}_d$. On obtient de plus que

$$m(E+\theta) = m(A+\theta) = m(A) = m(E),$$

ce qui achève la démonstration de (b).

Démontrons maintenant (c). Notons tout d'abord que

$$\mu\big(\{x_1=0\}\big) = 0. \tag{2.4.6}$$

En effet, d'après la proposition 1.4.2(b), on a

$$\mu\big(\{x_1=0\}\big) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\mu\big(\underbrace{\{x_1=0\}\cap\{\max_{2\le j\le d}|x_j|\le m\}}_{K_m}\big),$$

et l'on remarque que, pour $m\in\mathbb{N}$,

$$\{\max_{1\le j\le d}|x_j|\le m\} = \cup_{|\alpha|\le m}(K_m+\alpha\overrightarrow{e_1}) \supset \cup_{\alpha\in\mathbb{Q},|\alpha|\le m}(K_m+\alpha\overrightarrow{e_1}),$$

ce qui implique

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Q},|\alpha|\le m}\mu(K_m) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q},|\alpha|\le m}\mu(K_m+\alpha\overrightarrow{e_1}) \le \mu\big(\{\max_{1\le j\le d}|x_j|\le m\}\big) < +\infty$$

et par conséquent $\mu(K_m) = 0 = \mu\big(\{x_1=0\}\big)$. On démontre de même, en utilisant (2.4.6) et l'invariance par translation de μ, que tous les hyperplans affines parallèles aux axes sont de mesure nulle.

LEMME 2.4.3. *Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que, pour $j\neq k$, $\mu(E_j\cap E_k)=0$. Alors on a*

$$\mu(\cup_{j\in\mathbb{N}}E_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\mu(E_j).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la proposition 1.4.2(b), il suffit de démontrer, pour tout entier n, que

$$\mu(\cup_{0\le j\le n} E_j) = \sum_{0\le j\le n} \mu(E_j).$$

Or ceci est immédiat par récurrence sur n car

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{0\le j\le n+1} E_j) &= \mu\big(\cup_{0\le j\le n}(E_j\backslash E_{n+1})\big) + \mu(E_{n+1}) = \sum_{0\le j\le n} \mu(E_j\backslash E_{n+1}) + \mu(E_{n+1})\\ &= \sum_{0\le j\le n} \big(\mu(E_j\backslash E_{n+1}) + \mu(E_j\cap E_{n+1})\big) + \mu(E_{n+1}) = \sum_{0\le j\le n+1} \mu(E_j). \quad \square\end{aligned}$$

Pour $n \ge 1$ entier, on a

$$[0,1]^d = \cup_{0\le k_j<n} \overbrace{\prod_{1\le j\le d} [\frac{k_j}{n}, \frac{k_j+1}{n}]}^{\text{pavé } P_k}.$$

Remarquons qu'il y a n^d pavés P_k qui se déduisent tous par translation du pavé $P_0 = [0,1/n]^d$ et tels que $P_k \cap P_l$ est inclus dans un hyperplan affine parallèle aux axes pour des multi-indices k,l distincts. En utilisant le lemme 2.4.3, les conséquences de (2.4.6) sur la mesure des hyperplans et l'invariance par translation de μ, il vient

$$1 = \mu([0,1]^d) = n^d \mu([0,1/n]^d), \quad \text{i.e.} \quad \mu([0,1/n]^d) = n^{-d}.$$

Considérons alors un pavé compact rationnel

$$P = \prod_{1\le j\le d} [a_j, b_j], \quad a_j, b_j \in \mathbb{Q}, \quad [a_j,b_j] = [0, \frac{q_j}{n}] + \frac{c_j}{n}, \ \frac{q_j}{n} = b_j - a_j.$$

De l'invariance par translation de μ, il vient en réutilisant le lemme 2.4.3 et ce qui précède

$$\mu(P) = \mu\Big(\prod_{1\le j\le d} [0, \frac{q_j}{n}]\Big) = \mu\Big(\cup_{0\le k_j<q_j} \prod_{1\le j\le d} [\frac{k_j}{n}, \frac{k_j+1}{n}]\Big) = q_1 \dots q_d n^{-d} = \prod_{1\le j\le d} (b_j - a_j).$$

LEMME 2.4.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pavés rationnels compacts tels que, pour $n \ne m$, l'intersection $Q_n \cap Q_m$ est incluse dans un hyperplan affine parallèle aux axes et*

$$\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} Q_n.$$

DÉMONSTRATION. On a vu au lemme 1.2.4 que l'on pouvait trouver une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pavés rationnels compacts tels que $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Par conséquent, en posant

$$R_0 = P_0, R_1 = P_1\backslash P_0, \dots, R_n = P_n\backslash(\cup_{0\le j<n} P_j), \tag{2.4.7}$$

il vient $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, les R_n sont deux à deux disjoints. Considérons $(I_j)_{1\le j\le d}$ et $(J_j)_{1\le j\le d}$ des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ d'extrémités rationnelles. Considérons les pavés rationnels $S = \prod_{1\le j\le d} I_j$, $T = \prod_{1\le j\le d} J_j$. L'ensemble $S\backslash T$ est réunion finie de pavés rationnels deux à deux disjoints et $S\cap T$ est un pavé rationnel. En effet c'est vrai pour $d = 1$ car $I\backslash J$ est réunion d'au plus 2 intervalles disjoints d'extrémités rationnelles et de plus, pour $d > 1$, avec

$$S' = \prod_{1\le j\le d-1} I_j, \quad T' = \prod_{1\le j\le d-1} J_j$$

on a

$$S\backslash T = (S'\times I_d)\backslash(T'\times J_d) = \overbrace{\Big((S'\backslash T')\times I_d\Big)\cup\Big((S'\cap T')\times I_d\backslash J_d\Big)}^{\text{réunion disjointe}}$$

Par conséquent, comme par hypothèse de récurrence, $S'\backslash T'$ est réunion disjointe de N_{d-1} pavés rationnels et $S'\cap T'$ est un pavé rationnel, on trouve que $S\backslash T$ est réunion de N_d pavés rationnels disjoints avec

$$N_d \le N_{d-1} + 2N_{d-1}, \quad \text{de sorte que } N_d \le 2\times 3^{d-1}.$$

En outre, comme

$$S\cap T = \big(S'\cap T'\big)\times\big(I_d\cap J_d\big),$$

on trouve que $S\cap T$ est un pavé rationnel. Par conséquent, en revenant à (2.4.7), R_1 est réunion finie de pavés rationnels deux à deux disjoints, et, par récurrence, c'est aussi le cas de

$$R_{n+1} = P_{n+1}\backslash(\cup_{0\le j\le n} P_j) = \Big(P_{n+1}\backslash(\cup_{0\le j<n} P_j)\Big)\backslash P_n.$$

On a établi que R_n est réunion finie disjointe de pavés rationnels, i.e.

$$R_n = \cup_{1\le k\le m_n} S_{k,n}, \quad S_{k,n} \text{ pavé rationnel}, k\ne l \Longrightarrow S_{k,n}\cap S_{l,n} = \emptyset,$$

et de plus comme les R_n sont deux à deux disjoints, on a aussi

$$n\ne m \Longrightarrow S_{k,n}\cap S_{l,m} = \emptyset.$$

Par suite on a

$$\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} R_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{1\le k\le m_n} S_{k,n} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{1\le k\le m_n} \overline{S_{k,n}} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \Omega,$$

et les pavés rationnels $S_{k,n}$ étant deux à deux disjoints, l'intersection de leurs adhérences est incluse dans un hyperplan parallèle aux axes. La famille dénombrable $\big((\overline{S_{k,n}})_{1\le k\le m_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de pavés rationnels compacts vérifie donc les propriétés demandées à la famille (Q_n) du lemme 2.4.4. $\square$

Par conséquent, on obtient, pour un ouvert Ω, en utilisant les lemmes 2.4.3-4,

$$\mu(\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(Q_n) = m(\Omega),$$

ce qui implique que m coïncide avec μ sur les ouverts. Considérons maintenant un borélien E. D'après la propriété de régularité extérieure donnée par le théorème 2.2.1 (c), on a

$$m(E) = \inf_{\Omega \text{ ouvert } \supset E} m(\Omega) = \inf_{\Omega \text{ ouvert } \supset E} \mu(\Omega).$$

Il nous suffit donc de prouver que μ est régulière extérieurement pour conclure. Considérons pour cela la forme linéaire positive

$$\Lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu$$

définie sur $C_c(\mathbb{R}^d)$: remarquons que μ est finie sur les compacts et comme pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $|\varphi| \le \sup|\varphi| \mathbf{1}_{\operatorname{supp}\varphi}$ (et φ est mesurable car continue), Λ est bien une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Le théorème 2.2.1 donne l'existence d'une mesure régulière ν, définie sur la tribu de Borel telle que pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu. \tag{2.4.8}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$; il existe une suite de compacts $(K_j)_{j\ge1}$ tels que

$$\Omega = \cup_{j\ge1} K_j. \tag{2.4.9}$$

Considérons

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \in C_c(\Omega;[0,1]) \text{ telle que } \varphi_{1|K_1} = 1\\
&\varphi_2 \in C_c(\Omega;[0,1]) \text{ telle que } \varphi_{2|K_1\cup\operatorname{supp}\varphi_1} = 1\\
&\varphi_3 \in C_c(\Omega;[0,1]) \text{ telle que } \varphi_{3|K_1\cup K_2\cup\operatorname{supp}\varphi_1\cup\operatorname{supp}\varphi_2} = 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_{n+1} \in C_c(\Omega;[0,1]) \text{ telle que } \varphi_{n+1|K_1\cup\dots\cup K_n\cup\operatorname{supp}\varphi_1\cup\dots\cup\operatorname{supp}\varphi_n} = 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On a $\varphi_n \le \varphi_{n+1}, \quad \varphi_n(x) \nearrow \mathbf{1}_\Omega(x)$(de (2.4.9)). Par conséquent, en utilisant le théorème de Beppo Levi pour la mesure ν, l'égalité (2.4.8) puis le théorème de Beppo Levi pour la mesure μ, on obtient

$$\nu(\Omega) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n d\nu = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n d\mu = \mu(\Omega).$$

La mesure ν est régulière et coïncide avec μ sur les ouverts. En utilisant le lemme 2.2.11, on trouve pour E borélien et pour tout $\epsilon > 0$,

$$F \text{ fermé} \subset E \subset V \text{ ouvert}, \quad \epsilon > \nu(\underbrace{V \backslash F}_{\text{ouvert}}) = \mu(V \backslash F).$$

Par suite, on a

$$\mu(E) + \epsilon \ge \mu(E) + \mu(V \backslash F) \ge \mu(E) + \mu(V \backslash E) = \mu(V) \ge \mu(E)$$

et donc $\mu(E) = \inf_{V \text{ouvert} \supset E} \mu(V)$, q.e.d. Ceci achève la démonstration du théorème 2.4.1.

Proposition 2.4.5. Comparaison avec l'intégrale de Riemann. *Dans cette proposition, m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on note $L^1(m)$ par $L^1(\mathbb{R})$.*

(a) *Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f dm$, où $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$ est l'intégrale de Riemann de f. Soit $a \le b$ des réels et $f \in C^0([a,b])$. Alors $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f dm = \int_{\mathbb{R}} f\mathbf{1}_{[a,b]} dm.$$

(b) *Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Pour que f appartienne à $L^1(\mathbb{R})$, il faut et il suffit que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \sup_{a,b \in \mathbb{R}} \int_a^b |f(t)|dt < +\infty. \tag{2.4.10}$$

Si c'est le cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f dm = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(t)dt. \tag{2.4.11}$$

(c) *La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. On a donc*

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$. *En revanche, on a* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$

DÉMONSTRATION. La première partie du (a) est obtenue par construction grâce au (a) du théorème 2.2.1. En outre, pour $f \in C^0([a,b])$, la fonction $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est mesurable bornée et à support compact, donc dans $L^1(\mathbb{R})$. Considérons, pour $\epsilon > 0$, la fonction f_ϵ de $C^0_c(\mathbb{R})$ coïncidant avec f sur $[a,b]$, valant 0 sur $(-\infty, a-\epsilon] \cup [b+\epsilon, +\infty)$ et affine sur $[a-\epsilon, a] \cup [b, b+\epsilon]$. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\mathbf{1}_{[a,b]} dm &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon dm = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{a-\epsilon}^a \epsilon^{-1}(t-a+\epsilon) f(a) dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+\epsilon} \epsilon^{-1}(b+\epsilon-t) f(b) dt \right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^b f(t)dt + \frac{\epsilon}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right) = \int_a^b f(t)dt, \quad \text{qed.}\end{aligned}$$

Démontrons la partie (b). Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que la condition (2.4.10) soit vérifiée. Alors f est mesurable car continue. En outre, la suite de fonctions positives mesurables $|f|\mathbf{1}_{[-n,n]}$ converge simplement en croissant vers $|f|$ et le théorème de Beppo Levi implique donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f| dm = \sup_n \int |f\mathbf{1}_{[-n,n]}| dm = \sup_n \int_{-n}^n |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1(\mathbb{R})$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite $f\mathbf{1}_{[-n,n]}$ et obtenir (2.4.11). Réciproquement si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué aux suites $f\mathbf{1}_{[-p,q]}$ et le (a) donnent (2.4.10) et (2.4.11). Terminons avec (c). On a

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \ge \sum_{n\ge 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{n \ge 0} \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{t+n\pi} dt \ge \int_0^\pi |\sin t| dt \sum_{n\ge 0} \frac{1}{\pi + n\pi} = +\infty.$$

De plus, pour $R > \epsilon > 0$, on obtient en utilisant l'holomorphie de $z \mapsto z^{-1}e^{iz}$ sur $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$,

$$\int_\epsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_\pi^0 \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = 0. \tag{2.4.12}$$

Par conséquent, comme

$$1 \ge |e^{iRe^{i\theta}}| = e^{-R\sin\theta} \underset{R\to+\infty}{\rightarrow} 0, \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi,$$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la la partie imaginaire de (2.4.12) et l'on obtient

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R \frac{\sin t}{t} dt - \pi = 0, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.5.

Notes

Frédéric Riesz (1880–1956), mathématicien hongrois, est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Plusieurs versions du théorème de représentation 2.2.1 furent démontrées en 1907 et 1909 par F.Riesz. Son frère cadet, Marcel Riesz (1886–1969), était également un grand mathématicien, auteur de contributions fondamentales en analyse harmonique. **Johann Radon** (1887–1956), né en Bohême (en République Tchèque) est mort à Vienne (Autriche) après une carrière austro-allemande. On lui doit notamment la notion de mesure de Radon qui s'est avérée fondamentale en théorie de l'intégration et en théorie des distributions. Walter Rudin, auteur de l'excellent ouvrage cité dans notre bibliographie, attribue à Lebesgue le théorème de Beppo Levi [Th.1.26], ce qui semble incorrect sur le plan historique, car le théorème de convergence dominée fut démontré d'abord par Lebesgue sur des espaces de probabilité, puis Beppo Levi a démontré son théorème qui implique facilement le lemme de Fatou, lequel donne presque sans coup férir le théorème de convergence dominée dans le cas général.