3. ESPACES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

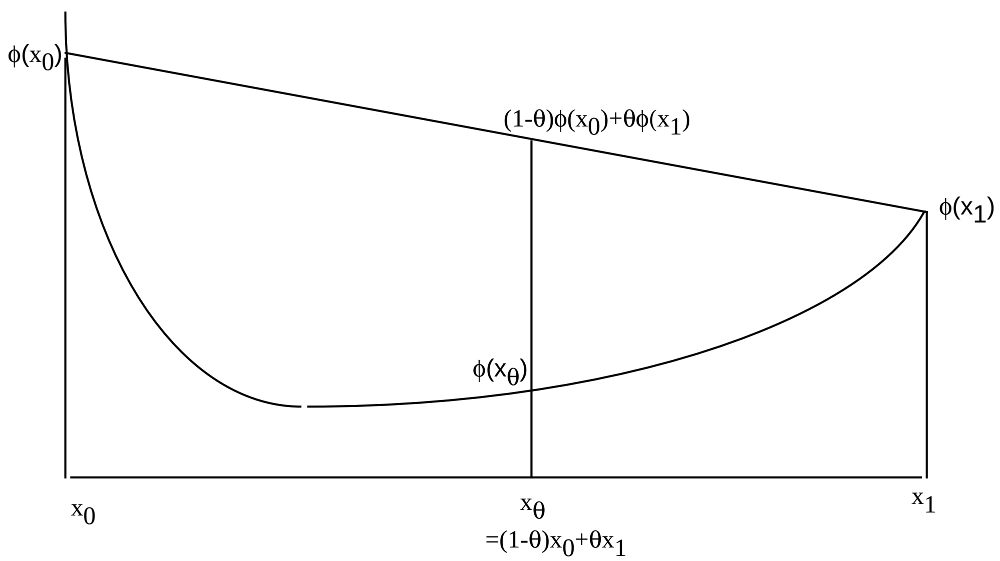
3.1. Inégalités de convexité

Définition 3.1.1. Fonction convexe d'une variable réelle. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si, pour tous les $x_0, x_1 \in I$ et $\theta \in [0,1]$, on a

$$\phi\big((1-\theta)x_0 + \theta x_1\big) \leq (1-\theta)\phi(x_0) + \theta\phi(x_1). \tag{3.1.1}$$

On peut remarquer que $x_\theta = (1-\theta)x_0 + \theta x_1$ décrit l'intervalle $[x_0, x_1]$ (ou bien $[x_1, x_0]$) lorsque θ décrit $[0,1]$ et par conséquent $x_\theta \in I$ ce qui donne un sens à (3.1.1). On dira que ϕ est concave si $-\phi$ est convexe.

La meilleure explication tient dans le dessin suivant: une fonction est convexe si les segments joignant les points de coordonnées $(x_j, \phi(x_j)), j = 0, 1$ sont situés au dessus de la courbe représentant ϕ.



Dans ce dessin, au dessus de l'axe des x, on n'a fait figurer que les ordonnées des points. Noter que sur la droite d'équation $x = x_\theta$, l'ordonnée $(1-\theta)\phi(x_0) + \theta\phi(x_1)$ se calcule par le théorème de Thalès.

PROPOSITION 3.1.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(a) *Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. La fonction ϕ est convexe si et seulement si la fonction ϕ' est croissante.*

(b) *Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. La fonction ϕ est convexe si et seulement si $\phi'' \geq 0$.*

(c) *La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

(d) *Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors ϕ est continue sur $\mathring{I}$.*

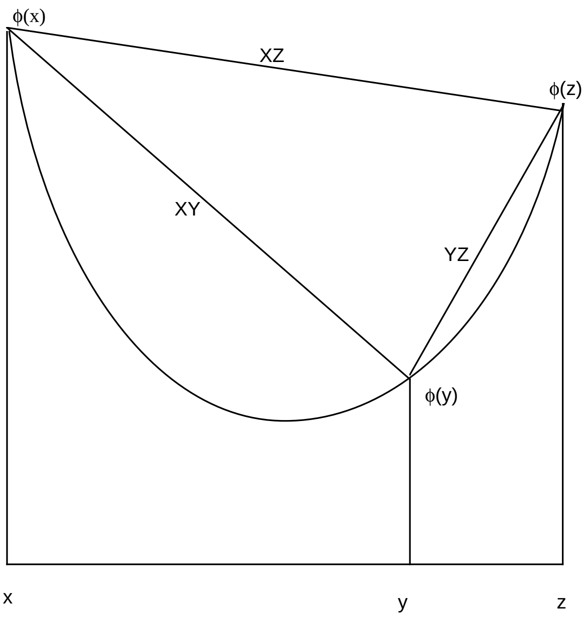
DÉMONSTRATION. Commençons par donner des propriétés équivalentes à (3.1.1). Une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tous les $x, y, z \in I$,

$$x_0 = x < y = x_\theta < x_1 = z \Longrightarrow \phi(y) \leq \underbrace{\frac{z-y}{z-x}}_{1-\theta}\phi(x) + \underbrace{\frac{y-x}{z-x}}_{\theta}\phi(z).$$

La propriété (3.1.1) est donc équivalente à la propriété suivante: pour tous les $x, y, z \in I$,

$$x < y < z \Longrightarrow \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x} \leq \frac{\phi(z)-\phi(x)}{z-x} \leq \frac{\phi(z)-\phi(y)}{z-y}, \tag{3.1.2}$$

car la première inégalité équivaut à $\phi(x_\theta) - \phi(x_0) \leq \theta\big(\phi(x_1) - \phi(x_0)\big)$ et la seconde à $(1-\theta)\big(\phi(x_1) - \phi(x_0)\big) \leq \phi(x_1) - \phi(x_\theta)$ qui sont toutes deux équivalentes à l'inégalité de (3.1.1). On peut également illustrer (3.1.2) par le dessin suivant



Par les points $X(x, \phi(x)), Y(y, \phi(y))$ et $Z(z, \phi(z))$ sur le graphe de ϕ passent les droites XY, XZ, YZ dont les pentes sont rangées par l'ordre lexicographique: $XY \preccurlyeq XZ \preccurlyeq YZ$.

Démontrons maintenant (a). Soit φ une fonction convexe différentiable sur un intervalle I et soient $x_1 < x_2$ des points de I. Pour $0 < \epsilon < (x_2 - x_1)/2$, on a

$$x_1 < x_1 + \epsilon < x_2 - \epsilon < x_2.$$

En utilisant les inégalités (3.1.2) pour les triplets $x_1 < x_1+\epsilon < x_2-\epsilon$, $x_1+\epsilon < x_2-\epsilon < x_2$, il vient

$$\frac{\varphi(x_1+\epsilon)-\varphi(x_1)}{\epsilon} \leq \frac{\varphi(x_2-\epsilon)-\varphi(x_1+\epsilon)}{x_2-x_1-2\epsilon} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_2-\epsilon)}{\epsilon},$$

ce qui implique en prenant la limite lorsque ϵ tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\varphi'(x_1) \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leq \varphi'(x_2)$$

et donc φ' est croissante. Réciproquement, soit φ une fonction différentiable sur un intervalle I, de dérivée monotone croissante. Pour $x < y < z$ points de I, il existe $\tilde{y} \in]x, y[$, $\tilde{z} \in]y, z[$ tels que

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} = \varphi'(\tilde{y}) \leq \varphi'(\tilde{z}) = \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

ce qui implique la convexité de φ et achève la preuve de (a). Le (b) résulte immédiatement de l'équivalence, valide pour une fonction ψ différentiable sur un intervalle I,

$$\psi \text{ croissante} \Longleftrightarrow \psi' \geq 0.$$

Le (c) est une conséquence de (b). Démontrons le (d). Soit φ une fonction convexe sur un intervalle I (d'intérieur non vide) et soient $a < b$ des réels tels que $[a, b] \subset \mathring{I}$. Considérons

$$a < x_1 < x_2 < b.$$

D'après (3.1.2), on a

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(a)}{x_1-a} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(a)}{x_2-a} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(b)-\varphi(x_1)}{b-x_1} \leq \frac{\varphi(b)-\varphi(x_2)}{b-x_2}, \tag{3.1.3}$$

ce qui implique

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(a)}{x_1-a}(x_2-a)+\varphi(a) \leq \varphi(x_2) \leq \varphi(b)-(b-x_2)\frac{\varphi(b)-\varphi(x_1)}{b-x_1}.$$

On obtient alors en prenant la limite lorsque x_2 tend vers x_1 par valeurs supérieures

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_1) - \varphi(a) + \varphi(a) \leq \liminf_{x_2 \to x_{1+}} \varphi(x_2) \leq \limsup_{x_2 \to x_{1+}} \varphi(x_2) \leq \varphi(b) - \big(\varphi(b) - \varphi(x_1)\big) = \varphi(x_1),$$

ce qui donne

$$\lim_{x_2 \to x_{1+}} \varphi(x_2) = \varphi(x_1). \tag{3.1.4}$$

De même, de (3.1.3) il vient

$$\varphi(b) - (b - x_1)\frac{\varphi(b) - \varphi(x_2)}{b - x_2} \leq \varphi(x_1) \leq (x_1 - a)\frac{\varphi(x_2) - \varphi(a)}{x_2 - a} + \varphi(a),$$

ce qui implique

$$\varphi(x_2) = \varphi(b) - \big(\varphi(b) - \varphi(x_2)\big) \leq \liminf_{x_1 \to x_{2-}} \varphi(x_1) \leq \limsup_{x_1 \to x_{2-}} \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2) - \varphi(a) + \varphi(a) = \varphi(x_2),$$

soit

$$\lim_{x_1 \to x_{2-}} \varphi(x_1) = \varphi(x_2). \tag{3.1.5}$$

La conjonction de la continuité à droite (3.1.4) et de la continuité à gauche (3.1.5) donne le résultat.

THÉORÈME 3.1.3. INÉGALITÉ DE JENSEN. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité (un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$). Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : X \to I$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $\varphi \circ f = \psi + g$, où $\psi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et g est mesurable ≥ 0. De plus $\int_X f d\mu \in I$ et*

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu,$$

où l'on a posé $\int_X (\varphi \circ f)\, d\mu = +\infty$ si $\int_X g d\mu = +\infty$.

DÉMONSTRATION. Posons $t_0 = \int_X f d\mu$ et considérons $I =]a, b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Montrons que $t_0 < b$. C'est vrai si $b = +\infty$ car $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$; de plus si $b < +\infty$, on a, puisque f est à valeurs dans I et μ est une probabilité

$$t_0 = \int_X f d\mu \leq \int_X b d\mu = b\mu(X) = b.$$

Si l'égalité $t_0 = b$ était vérifiée, on aurait $0 = \int_X (b-f)d\mu$. Comme la fonction $b - f$ est positive et dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, d'après la proposition 1.7.1, cela implique $b = f$, $\mu - pp$, donc au moins en un point, ce qui est exclu car f est à valeurs dans $]a, b[$. On démontre de même que $t_0 > a$, ce qui donne $\int_X f d\mu \in I$. Par suite, en utilisant la convexité de φ sur I, on obtient

$$\beta = \sup_{\substack{s<t_0 \\ s\in I}} \frac{\varphi(t_0)-\varphi(s)}{t_0-s} \le \inf_{\substack{u>t_0 \\ u\in I}} \frac{\varphi(u)-\varphi(t_0)}{u-t_0} < +\infty. \tag{3.1.6}$$

Par conséquent, on a

$$s \in I, s < t_0 \Longrightarrow \varphi(t_0) - \varphi(s) \le \beta(t_0 - s), \qquad \text{i.e} \qquad \varphi(s) \ge \varphi(t_0) - \beta(t_0 - s),$$

et de plus (3.1.6) implique

$$u \in I, u > t_0 \Longrightarrow \varphi(u) - \varphi(t_0) \ge \beta(u - t_0), \qquad \text{i.e} \qquad \varphi(u) \ge \varphi(t_0) - \beta(t_0 - u),$$

ce qui donne

$$\forall \sigma \in I, \varphi(\sigma) \ge \varphi(t_0) - \beta(t_0 - \sigma).$$

Par conséquent, comme f est à valeurs dans I, on obtient

$$\forall x \in X,\ \varphi\big(f(x)\big) \ge \varphi(t_0) - \beta\big(t_0 - f(x)\big),$$

qui implique

$$\varphi \circ f = \underbrace{\varphi(t_0) - \beta(t_0 - f)}_{=\psi\in\mathcal{L}^1(\mu)} + \underbrace{\varphi \circ f - \varphi(t_0) + \beta(t_0 - f)}_{=g \text{ mesurable } \ge 0},$$

car μ est une probabilité, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\varphi \circ f$ est mesurable (φ est continue d'après la proposition 3.1.2(d) et f est mesurable). Si g appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, on obtient $\varphi\circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int_X (\varphi \circ f)d\mu \ge \int_X \big(\varphi(t_0) - \beta(t_0 - f)\big)d\mu = \varphi(t_0) - \beta t_0 + \beta t_0 = \varphi\left(\int_X f d\mu\right).$$

Notons que si $\int_X g d\mu = +\infty$, on a, avec $0 \le \psi_\pm \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\varphi \circ f + \psi_- = \psi_+ + g \ge 0 \Longrightarrow \int_X (\varphi \circ f + \psi_-)d\mu = +\infty,$$

de sorte qu'il est légitime de poser $\int_X (\varphi \circ f)d\mu = +\infty$ dans ce cas.

REMARQUES 3.1.4.

(a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout entier $n \geq 1$ et tout n-uplet $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ de réels ≥ 0 tels que $\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j = 1$, on a, pour $x_1, \dots, x_n \in I$

$$\varphi\Big(\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j x_j\Big) \leq \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j \varphi(x_j). \tag{3.1.7}$$

Cette propriété est équivalente à la convexité (car (3.1.1) est (3.1.7) avec $n = 2$) et est également une conséquence de l'inégalité de Jensen appliquée à

$$X = \{1, \dots, n\}, \qquad \mu = \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j \delta_j, \qquad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ j & \mapsto & x_j & \mapsto & \varphi(x_j) \end{array},$$

car

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j x_j\Big) &= \varphi\Big(\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j f(j)\Big) = \varphi\left(\int_X f d\mu\right) \\ &\leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu = \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j (\varphi \circ f)(j) = \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j \varphi(x_j). \end{aligned}$$

Notons que (3.1.7) se démontre facilement pour une fonction convexe par récurrence sur $n \geq 2$.

(b) En utilisant le (a) et la convexité de l'exponentielle, on trouve l'inégalité arithmético-géométrique: pour $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs et $\theta_1, \dots, \theta_n$ positifs ou nuls tels que $\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j = 1$, on a

$$\overbrace{\prod_{1 \leq j \leq n} a_j^{\theta_j}}^{\text{moyenne géométrique des } a_j} \leq \overbrace{\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j a_j}^{\text{moyenne arithmétique des } a_j}, \tag{3.1.8}$$

car $\prod_{1 \leq j \leq n} a_j^{\theta_j} = \prod_{1 \leq j \leq n} e^{\theta_j \ln a_j} \leq \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j e^{\ln a_j} = \sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j a_j$.

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante. Soit $1 < p < +\infty$ un réel. On pose $p' = \frac{p}{p-1}$ et on dit que p' est l'exposant conjugué de p. L'exposant p' est caractérisé par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3.1.9}$$

Pour $p = 1$ (resp. $p = +\infty$) nous poserons naturellement $p' = +\infty$ (resp. $p' = 1$).

THÉORÈME 3.1.5. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ des fonctions mesurables, $1 < p < +\infty$ et p' son exposant conjugué. Alors on a*

(a) $\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}$ *(inégalité de Hölder),*

(b) $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$ *(inégalité de Minkowski).*

DÉMONSTRATION. On peut supposer f, g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. De plus, on peut supposer que $\int_X f^p d\mu > 0$ et $\int_X g^{p'} d\mu > 0$. Sinon, d'après la proposition 1.7.1 (a), on aurait $f = 0$ μ-pp ou $g = 0$ μ-pp, soit $fg = 0$ μ-pp, rendant (a) trivial car le membre de gauche est nul. On peut également supposer $\int_X f^p d\mu < +\infty$ et $\int_X g^{p'} d\mu < +\infty$, sinon, comme ces deux quantités sont strictement positives, leur produit serait $+\infty$, rendant (a) trivial car le membre de gauche est $+\infty$. Dans ces conditions, nous poserons

$$A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}, \qquad B = \left(\int_X g^{p'} d\mu\right)^{1/p'} \text{ (on a } 0 < A, B < +\infty),$$

et

$$F = \frac{f}{A}, \qquad G = \frac{g}{B} \quad \text{de sorte que} \quad \int_X F^p d\mu = \int_X G^{p'} d\mu = 1.$$

De l'inégalité arithmético-géométrique (3.1.8), il vient

$$FG = (F^p)^{1/p}(G^{p'})^{1/p'} \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{p'}G^{p'}$$

et par conséquent

$$\int_X FG d\mu \leq \int_X \left(\frac{1}{p}F^p + \frac{1}{p'}G^{p'}\right) d\mu = 1, \quad \text{i.e.} \quad \int_X fg d\mu \leq AB,$$

ce qui donne (a). Démontrons (b), en supposant que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\int_X f^p d\mu$ et $\int_X g^p d\mu$ soient finies. On a

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

et en appliquant le (a), il vient

$$\int_X (f+g)^p d\mu$$
$$\leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)p'} d\mu\right)^{1/p'} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)p'} d\mu\right)^{1/p'},$$

et comme $(p-1)p' = p$, ceci donne

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right] \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p'}. \tag{3.1.10}$$

L'application $t \mapsto t^p$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même est convexe, car $p \geq 1$, ce qui implique $\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}f^p + \frac{1}{2}g^p$, par suite le membre de gauche de (3.1.10) est fini et on obtient le résultat cherché

$$\left[\int_X (f+g)^p d\mu\right]^{1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}.$$

3.2. Espaces $L^p(\mu)$

DÉFINITION 3.2.1. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $f : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable et $1 \leq p < +\infty$ un réel. On dira que f appartient à $\mathcal{L}^p(\mu)$ si

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty, \tag{3.2.1}$$

i.e. si $|f|^p$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ (cf. définition 1.6.6). On définit également, comme dans la définition 1.7.2, $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ où $\sim$ désigne l'égalité μ-pp. On pose pour $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{3.2.2}$$

Cette quantité ne dépend que de la classe de f dans $\mathcal{L}^p(\mu)$ et $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel normé pour la norme (3.2.2). On notera $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace $L^p(m_d)$ où m_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $l^p(\mathbb{N})$ l'espace des suites à valeurs complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^p < +\infty$.

Démontrons tout d'abord que $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ des applications mesurables et α, β des nombres complexes. Alors, l'inégalité de Minkowski implique

$$\|\alpha f + \beta g\|_{L^p(\mu)} \leq \|\alpha f\|_{L^p(\mu)} + \|\beta g\|_{L^p(\mu)} = |\alpha|\, \|f\|_{L^p(\mu)} + |\beta|\, \|g\|_{L^p(\mu)} < +\infty,$$

si f, g sont dans $\mathcal{L}^p(\mu)$. L'espace $L^p(\mu)$ est l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par le sous-espace vectoriel $\{f \in \mathcal{L}^p(\mu), f \sim 0\}$. De plus, (3.2.2) ne dépend que de la classe de f (cf. proposition 1.7.1 (a)) et est une norme sur $L^p(\mu)$: la séparation est due à la proposition 1.7.1(a), l'homogénéité à la proposition 1.5.3(b) et l'inégalité triangulaire au théorème 3.1.5 (b).

Nous souhaitons maintenant définir les espaces $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$ de fonctions essentiellement bornées. Avant de donner la définition précise, examinons l'exemple suivant. Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que cette fonction est mesurable. De plus, bien que cette fonction soit non bornée, elle est “essentiellement” bornée car, m_1 désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$m_1\big(\{x \in \mathbb{R}, |f(x)| > 1\}\big) \le m_1(\mathbb{Q}) = 0.$$

Définition 3.2.2. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $f : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable. On dira que f appartient à $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ (f est essentiellement bornée) s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\mu\big(\{x \in X, |f(x)| > M\}\big) = 0. \tag{3.2.3}$$

$\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On définit $L^\infty(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ par la relation d'égalité μ-presque partout. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, on a

$$|f| \le \|f\|_{L^\infty(\mu)}, \mu\text{-pp avec} \quad \|f\|_{L^\infty(\mu)} = \inf\{M \in \mathbb{R}_+, \mu(|f| > M) = 0\}. \tag{3.2.4}$$

Cette quantité ne dépend que de la classe de f dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$ est un espace vectoriel normé pour la norme (3.2.4). On notera $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace $L^\infty(m_d)$ où m_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites à valeurs complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < +\infty$.

Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Alors il existe $M_0 \ge 0$ tel que $\mu(\{|f| > M_0\}) = 0$. D'après la définition (3.2.4), on a

$$\forall k \ge 1,\ \mu(\{|f| > \frac{1}{k} + \|f\|_{L^\infty(\mu)}\}) = 0,$$

et comme $\{|f| > \|f\|_{L^\infty(\mu)}\} = \cup_{k\ge1}\{|f| > \frac{1}{k} + \|f\|_{L^\infty(\mu)}\}$, il vient, puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle,

$$\mu\big(\{|f| > \|f\|_{L^\infty(\mu)}\}\big) = 0.$$

Soient $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. En notant $\|f\|$ l'expression (3.2.4), les inclusions

$$\{|f| \le \|f\|\} \cap \{|g| \le \|g\|\} \subset \{|f+g| \le \|f\| + \|g\|\}$$

impliquent par passage au complémentaire

$$\{|f| > \|f\|\} \cup \{|g| > \|g\|\} \supset \{|f+g| > \|f\| + \|g\|\},$$

ce qui implique $\mu\big(\{|f+g| > \|f\| + \|g\|\}\big) = 0$ et par conséquent $f + g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$. Comme par ailleurs, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, on a immédiatement $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$, on obtient que (3.2.4) est une norme sur l'espace vectoriel $L^\infty(\mu)$.

Remarque 3.2.3. Soit $f \in L^\infty(\mu)$. On a

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \inf_{\substack{A \in \mathcal{M} \\ \mu(A^c)=0}} \left(\sup_{x \in A} |f(x)| \right).$$

En effet, si $f \in L^\infty(\mu), A \in \mathcal{M}, \mu(A^c) = 0$, on a $f \sim f\mathbf{1}_A$ et par suite

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\mathbf{1}_A\|_{L^\infty(\mu)} \le \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Réciproquement, si $f \in L^\infty(\mu)$, on a vu que $\mu\Big(\{|f| > \|f\|_{L^\infty(\mu)}\}\Big) = 0$. En posant $A = \{|f| \le \|f\|_{L^\infty(\mu)}\}$ on trouve, $\mu(A^c) = 0$ et

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\mathbf{1}_A\|_{L^\infty(\mu)} \le \sup_{x \in A} |f(x)| \le \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Proposition 3.2.4. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $1 \le p, p' \le +\infty$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^{p'}(\mu)$. Alors le produit fg appartient à $L^1(\mu)$ et l'on a*

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^{p'}(\mu)}.$$

démonstration. Pour $1 < p < +\infty$, c'est l'inégalité de Hölder (théorème 3.1.5(a)). Si $p = 1$, alors $p' = +\infty$ et l'on a

$$|f(x)g(x)| \le |f(x)| \, \|g\|_{L^\infty(\mu)} \quad \mu - pp,$$

ce qui donne le résultat en intégrant l'inégalité via le théorème 1.7.3. □

N.B. Bien que les espaces $L^p(\mu)$ soient des quotients, et que ses éléments soient des classes de fonctions $\mathcal{L}^p(\mu)$, on continuera de parler de fonctions de $L^p(\mu)$, étant entendu qu'elles peuvent être modifiées sur des ensembles de mesure nulle.

THÉORÈME 3.2.5. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) et $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert (espace préhilbertien complet).*

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que $1 \le p < +\infty$ et considérons une suite $(f_n)_{n\ge 1}$ de Cauchy de $L^p(\mu)$, i.e. telle que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon,\ \forall n, m \ge N_\epsilon,\ \|f_n - f_m\|_{L^p(\mu)} \le \epsilon. \tag{3.2.5}$$

Montrons qu'il existe une suite strictement croissante d'indices

$$1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \dots \text{ telle que } \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| \le 2^{-k}. \tag{3.2.6}$$

D'après (3.2.5), il existe $n_1 \ge 1$ tel que $\forall p \ge 0, \|f_{p+n_1} - f_{n_1}\| \le 2^{-1}$. Supposons construits $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tels que

$$\forall p \ge 0, \forall j \in \{1, \dots, k\}, \quad \left\|f_{p+n_j} - f_{n_j}\right\| \le 2^{-j}. \tag{3.2.7}$$

D'après (3.2.5), il existe m_k tel que $\forall p \ge 0, \forall m \ge m_k, \|f_{p+m} - f_m\| \le 2^{-k-1}$. Posons

$$n_{k+1} = \max(1 + n_k, m_k).$$

Alors $n_k < n_{k+1}$ et $\forall p \ge 0, \left\|f_{p+n_{k+1}} - f_{n_{k+1}}\right\| \le 2^{-k-1}$, ce qui permet de construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k\ge 1}$ vérifiant (3.2.7) duquel on déduit (3.2.6). Considérons alors, pour $k \ge 1$, les fonctions mesurables positives

$$g_k = \sum_{1\le j\le k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|, \quad g = \sum_{j\ge 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|. \tag{3.2.8}$$

De (3.2.6) il vient

$$\|g_k\|_{L^p(\mu)} \le \sum_{1\le j\le k} \left\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right\|_{L^p(\mu)} \le \sum_{1\le j\le k} 2^{-j} \le 1$$

et par conséquent le lemme de Fatou (lemme 1.6.4) implique

$$\int_X \big(|g|^p = \lim_k |g_k|^p = \liminf_k |g_k|^p\big) d\mu \le \liminf_k \int_X |g_k|^p d\mu \le 1,$$

ce qui donne $g \in L^p(\mu)$ et $\|g\|_{L^p(\mu)} \le 1$ ainsi que $0 \le g < +\infty$ μ-pp (cf. proposition 1.7.1 (d)). Par suite la série télescopique $\sum_{j\ge 1}\big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big)$ converge absolument μ-pp, i.e. sur un ensemble mesurable A tel que $\mu(A^c) = 0$. Posons

$$f(x) = \Big[f_{n_1}(x) + \sum_{j\ge 1}\big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big)\Big]\mathbf{1}_A(x).$$

Comme

$$f_{n_1}(x) + \sum_{1\le j\le k}\big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big) = f_{n_{k+1}}(x),$$

on a $f(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$, $\quad\mu$-pp. Soit $\epsilon > 0$ et N_ϵ un entier tel que (3.2.5) soit vérifié. Le lemme de Fatou implique

$$\int_X \Big(|f - f_m|^p = \liminf_k |f_{n_k} - f_m|^p\Big) d\mu \le \liminf_k \int_X |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \le \epsilon^p, \quad \text{pour } m \ge N_\epsilon.$$

Par conséquent $f - f_m$ appartient à $L^p(\mu)$ ainsi que $f = f - f_m + f_m$ et

$$\|f - f_m\|_{L^p(\mu)} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{q.e.d. pour } 1 \le p < +\infty.$$

En particulier, $L^2(\mu)$ est un espace complet pour la norme

$$\|u\|_{L^2(\mu)} = \Big(\int_X u\bar{u}d\mu\Big)^{1/2}. \tag{3.2.9}$$

Pour $u, v \in L^2(\mu)$, la proposition 3.2.4 implique que $u\bar{v}$ appartient à $L^1(\mu)$ et par suite

$$L^2(\mu) \times L^2(\mu) \ni (u, v) \mapsto \int_X u\bar{v}d\mu = B(u, v) \tag{3.2.10}$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne, i.e. pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $u, v \in L^2(\mu)$,

$$B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v), \quad \overline{B(v, u)} = B(u, v). \tag{3.2.11}$$

L'espace $L^2(\mu)$ muni de la norme (3.2.9) est donc un espace de Hilbert. Examinons maintenant le cas $p = +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$. Considérons, pour n, m entiers naturels, les ensembles (de mesure nulle d'après (3.2.4))

$$A_n = \{x \in X, |f_n(x)| > \|f_n\|_{L^\infty(\mu)}\}, \quad B_{n,m} = \{x \in X, |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mu)}\}.$$

On pose $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \cup_{k,l\in\mathbb{N}} B_{k,l}$; comme E est réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, on a $\mu(E) = 0$, et pour $x \in E^c$, n, m entiers,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mu)}, \quad |f_n(x)| \leq \|f_n\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(\mu)} = M_0 < +\infty.$$

Le dernier point se déduit de l'hypothèse (3.2.5) car, dans un espace normé, l'inégalité triangulaire implique

$$\|f_n\| \leq \|f_n - f_m\| + \|f_m\|, \quad \|f_m\| \leq \|f_n - f_m\| + \|f_n\|, \quad \text{et par suite}$$
$$| \, \|f_n\| - \|f_m\| \, | = \max\big(\|f_n\| - \|f_m\|, \|f_m\| - \|f_n\|\big) \leq \|f_n - f_m\|, \tag{3.2.12}$$

ce qui démontre que la suite numérique $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc bornée. Pour $x \in E^c$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente (de limite $\leq M_0$ en valeur absolue). Posons

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{si } x \in E^c, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

La fonction f appartient à $L^\infty(\mu)$ (notons que f est mesurable comme limite simple de la suite $f_n \mathbf{1}_{E^c}$) et $\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leq M_0$. En outre, si $\epsilon > 0$ et $n \geq N_\epsilon$ (de (3.2.5)), on a

$$|f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{E^c}(x) = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)|\mathbf{1}_{E^c}(x) \leq \limsup_m \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mu)} \leq \epsilon.$$

Comme $\mu(E) = 0$, on a $\|f_n - f\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{x\in E^c} |f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{E^c}(x) \leq \epsilon$, ce qui démontre la convergence dans $L^\infty(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.2.5.

Il est intéressant de noter, qu'au cours de la preuve de ce théorème, nous avons également prouvé le résultat suivant.

Lemme 3.2.6. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $p \in [1, +\infty]$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $L^p(\mu)$. Alors, on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement μ- pp.*

On verra dans les exercices qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger dans $L^1(\mathbb{R})$ et néanmoins vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Ceci démontre que l'extraction d'une sous-suite est nécessaire pour déduire la convergence simple μ-pp de la convergence en moyenne (i.e. dans L^1).

PROPOSITION 3.2.7. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $1 \le p < +\infty$. On pose*

$$S = \{s : X \to \mathbb{C}, \text{mesurable, } s(X) \text{ fini avec } \mu\big(\{s \neq 0\}\big) < +\infty\}. \tag{3.2.13}$$

L'ensemble S est dense dans $L^p(\mu)$.

DÉMONSTRATION. Considérons $s \in S$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les valeurs (distinctes) non nulles prises par s. On a

$$s = \sum_{1 \le j \le m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, \quad A_j = s^{-1}(\{\alpha_j\}), \quad \mu(A_j) \le \mu(\{s \neq 0\}) < +\infty. \tag{3.2.14}$$

Comme les A_j sont deux à deux disjoints, on obtient

$$\int_X |s|^p d\mu = \sum_{1 \le j \le m} |\alpha_j|^p \mu(A_j) < +\infty, \tag{3.2.15}$$

et l'inclusion $S \subset L^p(\mu)$. Considérons maintenant une fonction f positive appartenant à $L^p(\mu)$. D'après le théorème d'approximation 1.3.3, il existe une suite croissante de fonctions étagées $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f. Chaque fonction s_k appartient à S car si s est une fonction étagée $\le f$, prenant les valeurs distinctes (et positives) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sur les ensembles deux à deux disjoints $A_1, \dots A_m$, on a

$$s = \sum_{1 \le j \le m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, \qquad \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ \alpha_j > 0}} \alpha_j^p \mu(A_j) = \int_X s^p d\mu \le \int_X f^p d\mu < +\infty,$$

ce qui implique que $\mu(A_j) < +\infty$ lorsque $\alpha_j > 0$ et donc

$$\mu\big(\{s \neq 0\}\big) = \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ \alpha_j > 0}} \mu(A_j) < +\infty,$$

ce qui donne $s \in S$. En revenant à la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on a

$$0 \le (f - s_k)^p = |f - s_k|^p \le f^p \in L^1(\mu) \text{ et } (f - s_k)^p \to 0 \text{ simplement,}$$

ce qui implique, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 1.6.8),

$$\int_X |f - s_k|^p d\mu \to 0, \quad \text{i.e. } \lim_k \|f - s_k\|_{L^p(\mu)} = 0.$$

On termine la preuve en décomposant $f \in L^p(\mu)$ sous la forme

$$f = (\operatorname{Re} f)_+ - (\operatorname{Re} f)_- + i(\operatorname{Im} f)_+ - i(\operatorname{Im} f)_-. \quad \square$$

3.3. Intégrales dépendant d'un paramètre

THÉORÈME 3.3.1. *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré où* μ *est une mesure positive. Soit* Y *un espace métrique,* $y_0 \in Y$ *et* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *une application vérifiant les propriétés suivantes.*

(*a*) *Pour tout* $y \in Y$*, l'application* $\begin{cases} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$ *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$.

(*b*) *Pour* μ*-presque tout* $x \in X$*, l'application* $\begin{cases} Y & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$ *est continue en* y_0.

(*c*) *Il existe une fonction* $0 \le g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *telle que, pour* μ*-presque tout* $x \in X$*, pour tout* $y \in Y$*,* $|f(x,y)| \le g(x)$.

Alors, la fonction F *définie par*

$$F(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x) \tag{3.3.1}$$

est continue en y_0 *(en particulier si l'on remplace dans l'hypothèse* (*b*) *"continue en* y_0*" par "continue sur* Y*", on trouve que* F *est continue sur* Y*). Si l'espace* Y *est localement compact et si, pour tout compact* K *de* Y*, il existe une fonction positive* $g_K \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *telle que, pour* μ*-presque tout* $x \in X$*,*

$$\sup_{y \in K} |f(x,y)| \le g_K(x) \tag{3.3.2}$$

alors F *est continue sur* Y*.*

REMARQUES. L'hypothèse (*b*) signifie qu'il existe $N \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et pour tout $x \in N^c$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est continue en y_0. De même, l'hypothèse (*c*) signifie qu'il existe $N \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et

$$\sup_{y \in Y} |f(x,y)| \mathbf{1}_{N^c}(x) \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Remarquons en outre que l'hypothèse (*a*) permet de définir F par la formule (3.3.1).

DÉMONSTRATION. Considérons une suite $(y_n)_{n \ge 1}$ de limite y_0 et

$$F(y_n) - F(y_0) = \int_X \underbrace{\big(f(x,y_n) - f(x,y_0)\big)}_{f_n(x)} d\mu(x).$$

La suite f_n converge simplement vers 0 pour μ-presque tout x, grâce à l'hypothèse (*b*). En outre, l'hypothèse (*c*) implique que $|f_n| \le 2g$ μ-presque partout. Ceci nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 1.7.4) qui donne le résultat $\lim_{n \to +\infty} F(y_n) = F(y_0)$. $\square$

THÉORÈME 3.3.2. *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré où* μ *est une mesure positive. Soit* Y *un ouvert de* $\mathbb{R}^m$, *et* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *une application vérifiant les propriétés suivantes.*

(a) *Pour tout* $y \in Y$, *l'application* $\begin{cases} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$ *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$.

(b) *Pour tout* $x \in X$, *l'application* $\begin{cases} Y & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$ *est différentiable sur* Y.

(c) *Pour tout compact* K *de* Y, *il existe une fonction positive* $g_K \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *telle que, pour tout* $x \in X$,

$$\sup_{y \in K} \|d_y f(x,y)\| \leq g_K(x). \tag{3.3.3}$$

Alors, la fonction F *définie par* (3.3.1) *est différentiable sur* Y, $d_y f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et*

$$dF(y) = \int_X d_y f(x,y) d\mu(x) \tag{3.3.4}$$

REMARQUES. La différentielle $d_y f(x,y)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^m$ (une forme linéaire sur $\mathbb{R}^m$) dont on prend en (3.3.3) la norme euclidienne. L'appartenance à $\mathcal{L}^1(\mu)$ de ce vecteur se définit par l'appartenance de chaque composante à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Pour tout $T \in \mathbb{R}^m$, l'application de X dans $\mathbb{C}$ définie par $x \mapsto d_y f(x,y) \cdot T$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ car d'une part, on a

$$d_y f(x,y) \cdot T = \lim_{k \to +\infty} k\big(f(x, y + T/k) - f(x,y)\big)$$

ce qui assure la mesurabilité, et d'autre part l'hypothèse (3.3.3) implique

$$\int_X |d_y f(x,y) \cdot T| d\mu(x) < +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Soit $y \in Y$ et $r > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(y,r)$ soit incluse dans Y. Pour $h \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|h\| \leq r$, on examine

$$F(y+h) - F(y) = \int_X \big(f(x, y+h) - f(x,y)\big) d\mu(x) = \int_X \Big[d_y f(x,y) \cdot h + \epsilon_{x,y}(h) \, \|h\|\Big] d\mu(x),$$

où

$$\lim_{h \to 0} \epsilon_{x,y}(h) = \epsilon_{x,y}(0) = 0. \tag{3.3.5}$$

Comme la fonction $x \mapsto d_y f(x,y) \cdot h$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, c'est aussi le cas de $\epsilon_{x,y}(h)$ et l'on obtient

$$F(y+h) - F(y) = \int_X d_y f(x,y) \cdot h d\mu(x) + \int_X \epsilon_{x,y}(h) d\mu(x) \|h\| .$$

De plus, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$|\epsilon_{x,y}(h)| \, \|h\| \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|d_y f(x, y+\theta h)\| \, \|h\| + \|d_y f(x,y)\| \, \|h\|$$

et par conséquent

$$|\epsilon_{x,y}(h)| \leq 2 \sup_{z \in \bar{B}(y,r)} \|d_z f(x,z)\| \leq 2 g_K(x) \in \mathcal{L}^1(\mu) \tag{3.3.6}$$

avec $K = \bar{B}(y,r)$ d'après (3.3.3). L'inégalité (3.3.6) et (3.3.5) permettent d'utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 1.7.4) pour montrer que, pour toute suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 dans $\mathbb{R}^m$, on a $\lim_{k \to +\infty} \int_X |\epsilon_{x,y}(h_k)| d\mu(x) = 0$. Ceci implique

$$F(y+h) - F(y) = \int_X d_y f(x,y) \cdot h d\mu(x) + \eta_y(h) \|h\| ,$$

avec $\eta_y(h) = \int_X \epsilon_{x,y}(h) d\mu(x)$, et $\lim_{h \to 0} \eta_y(h) = 0$. Ceci implique que l'application F est différentiable en tout point $y \in Y$ et $dF(y) \cdot h = \int_X d_y f(x,y) \cdot h d\mu(x)$, soit le résultat. $\square$

THÉORÈME 3.3.3. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : X \times U \to \mathbb{C}$ une application vérifiant les propriétés suivantes.*

(*a*) *Pour tout $z \in U$, l'application* $\begin{cases} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x,z) \end{cases}$ *appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

(*b*) *Pour tout $x \in X$, l'application* $\begin{cases} U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(x,z) \end{cases}$ *est holomorphe sur U.*

(*c*) *Pour tout compact K de U, il existe une fonction positive $g_K \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{z \in K} |f(x,z)| \leq g_K(x). \tag{3.3.7}$$

Alors, la fonction F définie par (3.3.1) *est holomorphe sur U, pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$X \ni x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,z) \in \mathbb{C}$$

appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ *et*

$$F^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,z)d\mu(x). \tag{3.3.8}$$

REMARQUE. Il est important de noter que l'hypothèse (3.3.7) est apparemment très faible, puisqu'on ne requiert que la domination locale de la fonction, et non pas comme en (3.3.3), un contrôle de la dérivée. En fait l'hypothèse (b) d'holomorphie et la formule de Cauchy permettent de retrouver une estimation pour la dérivée. De manière générale, les oscillations des fonctions holomorphes (e.g. les valeurs des dérivées) sont contrôlées par les valeurs des fonctions elles-mêmes.

DÉMONSTRATION. Soit $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que la boule fermée $K_0 = \bar{B}(z_0, r_0)$ soit incluse dans U. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\bar{B}(z_0, r_0/2)\backslash\{z_0\}$ de limite z_0. Considérons avec $z_n = z_0 + h_n$, Γ_0 le cercle de centre z_0 et de rayon r_0,

$$\begin{aligned} F(z_0+h_n) - F(z_0) &= \int_X \big[f(x, z_0+h_n) - f(x,z_0)\big]d\mu(x) \\ &= \int_X \frac{1}{2i\pi}\left[\oint_{\Gamma_0} \frac{f(x,\xi)}{\xi - z_0 - h_n}d\xi - \oint_{\Gamma_0}\frac{f(x,\xi)}{\xi - z_0}d\xi\right]d\mu(x) \\ &= \int_X \frac{1}{2i\pi}\left[\oint_{\Gamma_0} \frac{f(x,\xi)}{\xi - z_0}\left(\frac{\xi - z_0}{\xi - z_0 - h_n} - 1\right)d\xi\right]d\mu(x) \\ &= h_n \int_X \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\left[\oint_{\Gamma_0} \frac{f(x,\xi)}{\xi - z_0}\frac{1}{\xi - z_0 - h_n}d\xi\right]}_{G_n(x)}d\mu(x). \end{aligned}$$

Montrons que, pour tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_0}\frac{f(x,\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi = \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0). \tag{3.3.9}$$

En effet, pour $\xi \in \Gamma_0$, on a $|\xi - z_0| = r_0$, $|\xi - z_0 - h_n| \geq |\xi - z_0| - |h_n| = r_0 - |h_n| \geq r_0/2$, ce qui implique, pour tout $x \in X$,

$$\frac{|f(x,\xi)|}{|\xi - z_0||\xi - z_0 - h_n|} \leq \frac{2|f(x,\xi)|}{r_0^2},$$

et par conséquent pour $\xi = z_0 + r_0 e^{i\theta}$

$$\frac{|ir_0 e^{i\theta}|}{|2i\pi|}\frac{|f(x, z_0 + r_0 e^{i\theta})|}{r_0|r_0 e^{i\theta} - h_n|} \leq \frac{1}{\pi}\frac{|f(x, z_0 + r_0 e^{i\theta})|}{r_0^2} = \Omega(\theta) \in L^1([0, 2\pi]). \tag{3.3.10}$$

Comme en outre, pour $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ir_0 e^{i\theta}}{2i\pi} \frac{f(x, z_0 + r_0 e^{i\theta})}{r_0 e^{i\theta}(r_0 e^{i\theta} - h_n)} = \frac{ir_0 e^{i\theta}}{2i\pi} \frac{f(x, z_0 + r_0 e^{i\theta})}{r_0^2 e^{2i\theta}},$$

il vient de (3.3.10)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} G_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} \frac{f(x,\xi)}{(\xi - z_0)(\xi - z_0 - h_n)} d\xi \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x, z_0 + r_0 e^{i\theta})}{r_0 e^{i\theta}(r_0 e^{i\theta} - h_n)} ir_0 e^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x, z_0 + r_0 e^{i\theta})}{r_0^2 e^{2i\theta}} ir_0 e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} \frac{f(x,\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi = \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0),
\end{aligned}$$

soit (3.3.9). En outre, on a

$$|G_n(x)| \leq \frac{2\pi r_0}{2\pi} \frac{2}{r_0^2} \sup_{\xi \in \Gamma_0} |f(x,\xi)| \leq \frac{2}{r_0} g_{K_0}(x) \in L^1(\mu).$$

Le théorème de convergence dominée, appliqué à la suite G_n, montre alors que $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0)$ appartient à $L^1(\mu)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} h_n^{-1}\big(F(z_0 + h_n) - F(z_0)\big) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0) d\mu(x),$$

ceci pour tout $z_0 \in U$. On obtient alors $(a), (b)$ pour $\frac{\partial f}{\partial z}$ ainsi que (c) en utilisant la formule de Cauchy. Une récurrence immédiate permet alors de conclure la démonstration du théorème 3.3.3.

Quelques exemples.

Terminons ce paragraphe avec quelques exemples qui seront développés dans les exercices. Tout d'abord, la fonction gamma, définie a priori sur $H_0 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ par la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{3.3.11}$$

On démontre, en utilisant le théorème 3.3.3, que la fonction Γ est holomorphe sur H_0, et vérifie sur H_0 l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{3.3.12}$$

ce qui permet de prolonger cette fonction en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en $\{-k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de résidu $\frac{(-1)^k}{k!}$. Notons que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$ et que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Introduisons également la fonction Zeta définie a priori sur $H_1 = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$ par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}. \tag{3.3.13}$$

Le théorème 3.3.3 permet de démontrer que cette fonction est holomorphe sur H_1. On peut également démontrer (cf. exercices) que cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un unique pôle (simple de résidu 1) au point 1. On démontre également que, pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1-p^{-s})^{-1}, \tag{3.3.14}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Par ailleurs, la distribution des nombres premiers est intimement liée à la répartition des zéros de la fonction Zeta. En particulier, le théorème d'Hadamard

$$\operatorname{Card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\} \stackrel{\text{déf}}{=} \pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}, \tag{3.3.15}$$

se démontre en prouvant que la fonction ζ ne s'annule pas sur $\overline{H_1}$. La conjecture de Riemann, l'un des plus célèbres problèmes mathématiques non résolus, énoncé en 1859, affirme que les zéros non réels de la fonction ζ sont situés sur la droite critique $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$. Notons également la fonction ξ, fonction entière (i.e. holomorphe sur $\mathbb{C}$) définie par

$$\xi(s) = \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\frac{1}{2}s(s-1), \tag{3.3.16}$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{3.3.17}$$

Un autre exemple intéressant est constitué par la fonction theta de Jacobi, que nous noterons θ_J, définie pour $\operatorname{Re} z > 0$ par

$$\theta_J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}. \tag{3.3.18}$$

Le théorème 3.3.3 permet de prouver que cette fonction est holomorphe sur H_0. En outre, on démontre la propriété modulaire de la fonction θ,

$$\theta_J(1/z) = z^{1/2}\theta_J(z). \tag{3.3.19}$$

Fonction classique également que la fonction Beta, définie pour $x, y \in H_0$, par la formule

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{3.3.20}$$

On démontre facilement la formule

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3.3.21}$$

On renvoie aux exercices pour d'autres exemples, notamment sur les fonctions d'Airy, de Bessel, les intégrales elliptiques, les intégrales de Fresnel ...

3.4. Fonctions continues de $L^p(\mathbb{R}^d)$

THÉORÈME 3.4.1. *Soit $1 \le p < +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que la proposition 3.2.7 nous donne la densité de S, défini par (3.2.13), dans $L^p(\Omega)$. Il nous suffit alors de considérer un borélien $A \subset \Omega$ de mesure finie et de montrer que l'on peut approcher $\mathbf{1}_A$ en norme L^p par une fonction de $C_c(\Omega)$. Soit $\epsilon > 0$. Du lemme 2.2.11, il vient l'existence de F fermé et V ouvert $\subset \Omega$ tels que

$$F \subset A \subset V, \quad m(V\backslash F) < \epsilon^p/2^p, \tag{3.4.1}$$

ce qui implique en particulier

$$\int_\Omega |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_V|^p dm = \int_\Omega \mathbf{1}_{V\backslash A}^p dm = m(V\backslash A) < \epsilon^p/2^p. \tag{3.4.2}$$

De plus, on a

$$m(V) = m(A) + m(V\backslash A) \le m(A) + m(V\backslash F) \le m(A) + \epsilon^p/2^p < +\infty.$$

En utilisant (2.4.3) dans la preuve du lemme 2.4.2, on trouve $\chi \in C_c(V;[0,1])$ tel que

$$m(V) - \epsilon^p/2^p < \int_\Omega \chi dm \le m(V) = \sup_{\chi\in C_c(V;[0,1])} \int_\Omega \chi dm < +\infty,$$

et par conséquent

$$\int_\Omega |\mathbf{1}_V - \chi|^p dm = \int_V |1-\chi|^p dm \le \int_V (1-\chi)dm = m(V) - \int_V \chi dm < \epsilon^p/2^p. \tag{3.4.3}$$

On obtient alors de (3.4.1-2) l'inégalité $\|\mathbf{1}_A - \chi\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon$ et le résultat. $\square$

THÉORÈME 3.4.2. *Soit* $1 \le p < +\infty$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$. *L'espace* $C_c^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\chi \in C_c(\Omega)$ et $\rho_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$, $\operatorname{supp} \rho_0 = \bar{B}(0,1)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)dx = 1$ (il suffit de considérer la fonction (2.1.2) divisée par son intégrale). Pour $\epsilon > 0$, on pose

$$\chi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0\big((x-y)\epsilon^{-1}\big)\epsilon^{-d}\chi(y)dy. \tag{3.4.4}$$

Le théorème 3.3.2 implique que χ_ϵ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. De plus on a

$$\operatorname{supp} \chi_\epsilon \subset \operatorname{supp} \chi + \epsilon \bar{B}(0,1) \subset \Omega \quad \text{pour } \epsilon \text{ assez petit (cf. (2.1.3))}. \tag{3.4.5}$$

En outre, en utilisant un changement de variable affine, on obtient

$$\chi_\epsilon(x) - \chi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(z)\big(\chi(x+\epsilon z) - \chi(x)\big)dz$$

et donc, grâce à la continuité uniforme de la fonction χ (continue à support compact), on a l'inégalité $|\chi_\epsilon(x) - \chi(x)| \le \sup_{|x_1 - x_2| \le \epsilon} |\chi(x_1) - \chi(x_2)| = \theta(\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$, de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_\epsilon(x) - \chi(x)|^p dx \le \theta(\epsilon)^p m(\operatorname{supp} \chi + \epsilon \bar{B}(0,1)) \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0. \quad \square$$

REMARQUES 3.4.3. Pour $1 \le p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est donc le complété de $C_c(\Omega)$ pour la norme L^p. Nous aurions pu définir de cette manière l'espace L^p, mais nous serions obligés de manipuler des classes de suites de Cauchy de fonctions continues, ce qui serait à la fois inélégant et compliqué. Nous avons pu réaliser L^p comme un espace de fonctions.

On verra dans les exercices que la complétion de $C_c(\mathbb{R}^d)$ pour la norme L^∞ n'est pas $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mais $C_{(0)}(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini i.e. les fonctions continues f sur $\mathbb{R}^d$ telles que

$$\lim_{R \to +\infty} \Big\{ \sup_{|x| \ge R} |f(x)| \Big\} = 0.$$

Nous terminerons ce chapitre avec un conséquence importante du théorème 3.4.2.

LEMME 3.4.4. LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE. *Soit* $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *On pose*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(x)dx \qquad (\textit{transformée de Fourier de } u). \tag{3.4.6}$$

Alors, on a

$$\widehat{u}(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4.7}$$

DÉMONSTRATION. On remarque pour commencer que (3.4.6) a un sens comme intégrale d'une fonction L^1 et que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\widehat{u}(\xi)| \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.4.8}$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, du théorème 3.3.2, il vient, en posant pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}, \quad D_j = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d} \tag{3.4.9}$$

les identités

$$\xi_1 \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{D_1\varphi}(\xi), \quad \widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi). \tag{3.4.10}$$

Par conséquent, on en déduit

$$\big(1+|\xi|^2\big)\widehat{\varphi}(\xi) = \text{Fourier}\Big(\varphi + \sum_{1\le j\le d} D_j^2\varphi\Big)$$

et donc $\big(1+|\xi|^2\big)|\widehat{\varphi}(\xi)| \le \|\varphi + \sum_{1\le j\le d} D_j^2\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, ce qui implique (3.4.7) pour φ. Soit maintenant $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a

$$|\widehat{u}(\xi)| \le |\widehat{(u-\varphi)}(\xi)| + |\widehat{\varphi}(\xi)| \le \|u-\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + |\widehat{\varphi}(\xi)|$$

et donc, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{u}(\xi)| \le \|u-\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \Longrightarrow \limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{u}(\xi)| \le \inf_{\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)} \|u-\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0. \quad \square$$

Notes

Thalès de Milet a vécu de 624 av.JC à 547 av.JC. Milet est une ville d'Asie mineure (aujourd'hui en Turquie). Thalès semble être le premier philosophe grec connu, également scientifique et mathématicien, ingénieur de métier. Le théorème de Thalès est en fait l'un des axiomes des espaces vectoriels et s'exprime par

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

où λ est un scalaire (e.g. un réel dans le cas d'un espace vectoriel réel) et x, y sont des vecteurs. Johan **Jensen** (1859–1925) est un mathématicien danois, qui a démontré en 1906 l'inégalité fondamentale qui porte maintenant son nom. Otto **Hölder** (1859–1937), mathématicien allemand, a établi en 1884 l'inégalité qui porte son nom. Hermann **Minkowski** (1864–1909) était professeur à l'université de Göttingen. Il a enseigné également à Zürich où Albert Einstein suivit ses cours.