

4. INTÉGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT

4.1. Produit d'espaces mesurables

DÉFINITION 4.1.1. TRIBU PRODUIT. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1), (X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 et on note $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, la tribu sur $X_1 \times X_2$ engendrée par les ensembles du type $A_1 \times A_2$, où $A_j \in \mathcal{M}_j, j = 1, 2$ (on dira que $A_1 \times A_2$ est un *rectangle*).

Notons que $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la plus petite tribu (i.e. l'intersection des tribus) rendant mesurables les projections canoniques $\pi_j : X_1 \times X_2 \rightarrow X_j, \pi_j((x_1, x_2)) = x_j, j = 1, 2$. En effet, d'une part π_1 est mesurable car, pour $A_1 \in \mathcal{M}_1, \pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ qui est un rectangle donc appartient à $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ (idem pour π_2). D'autre part, si \mathcal{T} est une tribu sur $X_1 \times X_2$ telle que les π_j soient mesurables, alors, pour $A_j \in \mathcal{M}_j, \mathcal{T}$ contient $\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ et $\pi_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$ et par conséquent leur intersection

$$(A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) = A_1 \times A_2.$$

La tribu \mathcal{T} contient donc les rectangles et par suite la tribu engendrée par les rectangles, i.e. $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, qed.

REMARQUE 4.1.2. Considérons pour $j = 1, 2$ des applications mesurables $f_j : X_j \rightarrow \mathbb{C}$ et posons

$$\begin{aligned} f_1 \otimes f_2 : X_1 \times X_2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) &\mapsto f_1(x_1)f_2(x_2). \end{aligned}$$

L'application $f_1 \otimes f_2$ est égale au produit $(f_1 \circ \pi_1)(f_2 \circ \pi_2)$. Or les applications $f_j \circ \pi_j$ sont mesurables d'après le lemme 1.1.6 et le théorème 1.2.5 montre que leur produit l'est également; ceci démontre la mesurabilité de $f_1 \otimes f_2$.

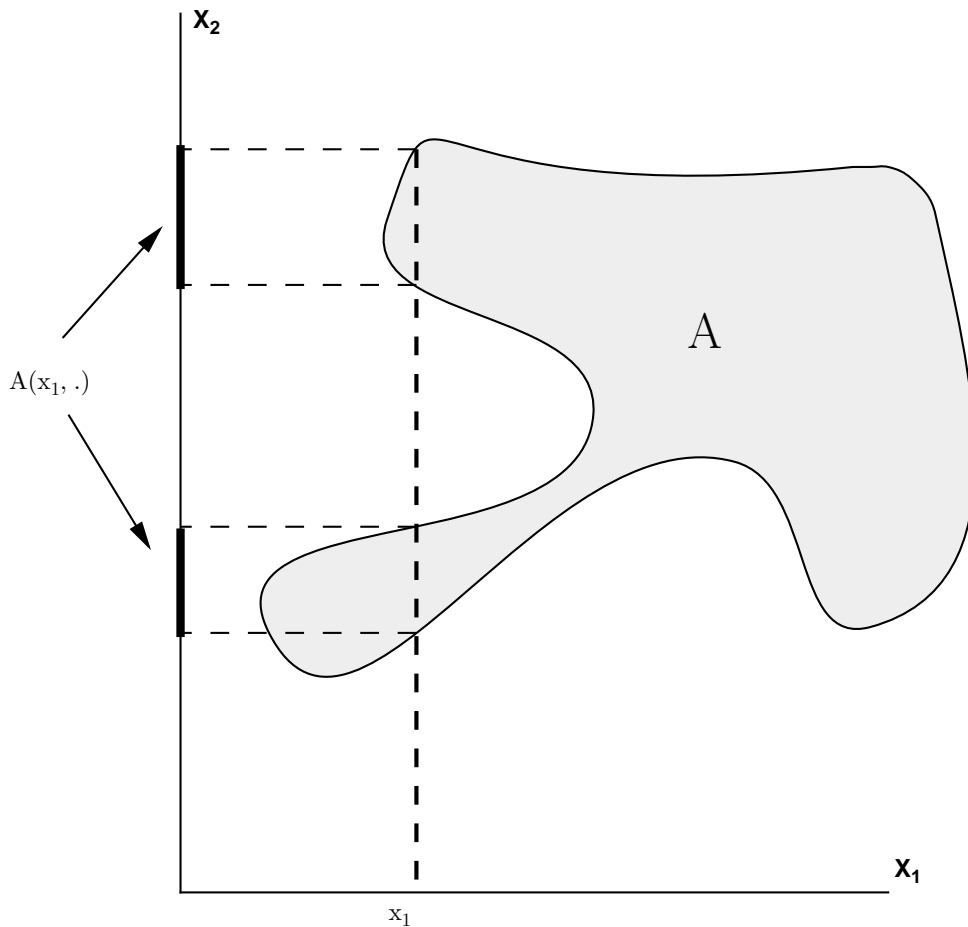
PROPOSITION 4.1.3. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1), (X_2, \mathcal{M}_2), (Y, \mathcal{T})$ des espaces mesurables et $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ une application mesurable. Alors

- (a) $\forall x_1 \in X_1$, l'application $f(x_1, \cdot) : x_2 \in X_2 \mapsto f(x_1, x_2) \in Y$ est mesurable, $\forall x_2 \in X_2$, l'application $f(\cdot, x_2) : x_1 \in X_1 \mapsto f(x_1, x_2) \in Y$ est mesurable.
- (b) Pour $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, et $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, on pose

$$(4.1.1) \quad A(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A\}, \quad A(\cdot, x_2) = \{x_1 \in X_1, (x_1, x_2) \in A\}.$$

L'ensemble $A(x_1, \cdot)$ appartient à \mathcal{M}_2 et $A(\cdot, x_2)$ appartient à \mathcal{M}_1 .

On peut commencer par examiner le dessin suivant où apparaît la “tranche verticale” $A(x_1, \cdot)$. Il serait facile de dessiner une “tranche horizontale” $A(\cdot, x_2)$, ce que nous nous sommes abstenu de faire pour la clarté du dessin.



$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \quad A(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A\},$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $B \in \mathcal{T}$. On a, pour $x_1 \in X_1$,

$$f(x_1, \cdot)^{-1}(B) = \{x_2 \in X_2, f(x_1, x_2) \in B\} = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))(x_1, \cdot).$$

La mesurabilité de f implique que $f^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$; par conséquent, il

suffit de prouver (b) pour obtenir (a). Pour cela considérons

$$\mathcal{M} = \{E \subset X_1 \times X_2, \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2, E(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_2, E(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_1\}.$$

On remarque que si $E \in \mathcal{M}$ alors $E^c \in \mathcal{M}$: on a pour $x_1 \in X_1$,

$$(E^c)(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in E^c\} = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \notin E\} = \left(\underbrace{E(x_1, \cdot)}_{\in \mathcal{M}_2 \text{ car } E \in \mathcal{M}} \right)^c$$

qui appartient à \mathcal{M}_2 car \mathcal{M}_2 est une tribu, donc est stable par passage au complémentaire.

Comme on démontre de même que, pour $x_2 \in X_2$, $(E^c)(\cdot, x_2)$ appartient à \mathcal{M}_1 , on trouve effectivement que $E^c \in \mathcal{M}$. De plus, si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{M} , alors $\cup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathcal{M}$: pour $x_1 \in X_1$, on a

$$\left(\cup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right)(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in \cup_{k \in \mathbb{N}} E_k\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \left(\underbrace{E_k(x_1, \cdot)}_{\in \mathcal{M}_2 \text{ car } E_k \in \mathcal{M}} \right)$$

qui appartient à \mathcal{M}_2 car \mathcal{M}_2 est une tribu, donc est stable par réunion dénombrable.

Comme on démontre de même que, pour $x_2 \in X_2$, $(\cup_{k \in \mathbb{N}} E_k)(\cdot, x_2)$ appartient à \mathcal{M}_1 , on trouve effectivement que $\cup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathcal{M}$. En outre, les rectangles sont éléments de \mathcal{M} : si $A_j \in \mathcal{M}_j$, $j = 1, 2$, on a, pour $x_1 \in X_1$,

$$(A_1 \times A_2)(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x_1 \notin A_1 \\ A_2, & \text{si } x_1 \in A_1 \end{cases} \in \mathcal{M}_2.$$

On démontre de même que, pour $x_2 \in X_2$, $(A_1 \times A_2)(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_1$. Il suit de ce qui précède que \mathcal{M} est une tribu sur $X_1 \times X_2$ qui contient les rectangles, et donc la tribu engendrée par les rectangles $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Ceci achève la preuve de (b) et de la proposition.

REMARQUE 4.1.4. Soit $d \in \mathbb{N}$ et \mathcal{B}_d la tribu des boréliens sur \mathbb{R}^d . Alors si $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, on a

$$(4.1.2) \quad \mathcal{B}_{d_1+d_2} = \mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2}.$$

On démontre tout d'abord que $\mathcal{B}_{d_1+d_2} \supset \mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2}$: $\mathcal{B}_{d_1+d_2}$ est une tribu pour laquelle les projections sont mesurables (car elles sont continues), donc contient la plus petite tribu rendant les projections mesurables $\mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2}$. En outre d'après le lemme 1.2.4, la tribu $\mathcal{B}_{d_1+d_2}$ est engendrée par les pavés compacts $\prod_{1 \leq j \leq d_1+d_2} [a_j, b_j]$ qui sont aussi des rectangles (car égaux à $\prod_{1 \leq j \leq d_1} [a_j, b_j] \prod_{d_1+1 \leq j \leq d_1+d_2} [a_j, b_j]$). Par conséquent, en utilisant la notation de la définition 1.1.3, on a

$$\mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2} \subset \mathcal{B}_{d_1+d_2} = \mathcal{M}(\text{pavés compacts}) \subset \mathcal{M}(\text{rectangles}) = \mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2}. \quad \square$$

4.2. Produit tensoriel de mesures σ -finies

LEMME 4.2.1. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés où les μ_j sont des mesures positives et σ -finies (i.e. $X_j = \cup_{k \in \mathbb{N}} E_k^j$, avec $\mu_j(E_k^j) < +\infty$). Soit $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$; on pose $\varphi_1(x_1) = \mu_2(A(x_1, \cdot))$, $\varphi_2(x_2) = \mu_1(A(\cdot, x_2))$. Alors φ_j est \mathcal{M}_j mesurable ($j = 1, 2$) et

$$\int_{X_1} \varphi_1 d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2 d\mu_2.$$

DÉMONSTRATION. Si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_j \in \mathcal{M}_j$, c'est vrai car

$$(A_1 \times A_2)(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_1 \notin A_1 \\ A_2 & \text{si } x_1 \in A_1 \end{cases},$$

ce qui implique que

$$\varphi_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \notin A_1 \\ \mu_2(A_2) & \text{si } x_1 \in A_1 \end{cases}, \text{ i.e. } \varphi_1 = \mu_2(A_2) \cdot \mathbf{1}_{A_1}, \quad \varphi_2 = \mu_1(A_1) \cdot \mathbf{1}_{A_2},$$

et donc si $\mu_1(A_1)$ et $\mu_2(A_2)$ sont finis,

$$\int_{X_1} \varphi_1 d\mu_1 = \mu_2(A_2)\mu_1(A_1) = \int_{X_2} \varphi_2 d\mu_2, \quad \text{qed.}$$

Par ailleurs si $\mu_2(A_2) = +\infty$ et $\mu_1(A_1) = 0$, on a $\varphi_1 = 0$, μ_1 -pp et $\varphi_2 = 0$ ce qui donne le résultat. Finalement si $\mu_2(A_2) = +\infty$ et $\mu_1(A_1) > 0$, on trouve $\int_{X_1} \varphi_1 d\mu_1 = +\infty = \int_{X_2} \varphi_2 d\mu_2$. Soit $\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \text{ la propriété du lemme est vérifiée}\}$. On vient de voir que

(i) $\mathcal{R} \supset \text{rectangles.}$

En outre

(ii) si $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de \mathcal{R} , alors $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$.

En effet, posons $\varphi_{1,j}(x_1) = \mu_2(A_j(x_1, \cdot))$, $\varphi_{2,j}(x_2) = \mu_1(A_j(\cdot, x_2))$. La suite d'ensembles

$$A_j(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A_j\}$$

est croissante de réunion $A(x_1, \cdot)$. Par conséquent,

$$0 \leq \varphi_{1,j}(x_1) \uparrow \varphi_1(x_1), \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi_{2,j}(x_2) \uparrow \varphi_2(x_2).$$

Du théorème de Beppo Levi, il vient

$$\int_{X_1} \varphi_{1,j} d\mu_1 \uparrow \int_{X_1} \varphi_1 d\mu_1, \quad \text{et} \quad \int_{X_2} \varphi_{2,j} d\mu_2 \uparrow \int_{X_2} \varphi_2 d\mu_2.$$

Comme $A_j \in \mathcal{R}$, on a $\int_{X_1} \varphi_{1,j} d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_{2,j} d\mu_2$, ce qui donne (ii). En outre, si

(iii) $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de \mathcal{R} d'ensembles deux à deux disjoints, alors $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$.

En effet, en considérant la suite croissante $B_n = \cup_{0 \leq j \leq n} A_j$, et en utilisant (ii), on voit qu'il suffit de vérifier que si A_1, A_2 sont disjoints et dans \mathcal{R} , alors $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$. On a

$$(A_1 \cup A_2)(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A_1 \cup A_2\} = \underbrace{A_1(x_1, \cdot) \cup A_2(x_1, \cdot)}_{\text{réunion disjointe}},$$

ce qui donne

$$\mu_2(A_1 \cup A_2)(x_1, \cdot) = \mu_2(A_1(x_1, \cdot)) + \mu_2(A_2(x_1, \cdot)),$$

et

$$\int_{X_1} \overbrace{\mu_2(A_1 \cup A_2)(x_1, \cdot)}^{\varphi_1(x_1)} d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2(A_1(x_1, \cdot)) d\mu_1(x_1) + \int_{X_1} \mu_2(A_2(x_1, \cdot)) d\mu_1(x_1).$$

En utilisant que A_1 et A_2 sont dans \mathcal{R} , on obtient le résultat. De plus si $A_1 \in \mathcal{M}_1, A_2 \in \mathcal{M}_2$ avec $\mu_j(A_j) < \infty, j = 1, 2$, et si (Q_j) est une suite décroissante d'ensembles de \mathcal{R} tels que $A_1 \times A_2 \supset Q_j$, alors

$$(iv) \quad Q = \cap_j Q_j \in \mathcal{R}.$$

Posons

$$\varphi_{1,j}(x_1) = \mu_2(Q_j(x_1, \cdot)) = \mu_2(\{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in Q_j\}) \leq \mu_2(A_2) < \infty.$$

On a alors en utilisant la proposition 1.4.2 (c)

$$\varphi_{1,j}(x_1) \rightarrow \varphi_1(x_1) = \mu_2(\{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in Q\})$$

et de même

$$\mu_1(Q_j(\cdot, x_2)) = \varphi_{2,j}(x_2) \rightarrow \varphi_2(x_2) = \mu_1(\{x_1 \in X_1, (x_1, x_2) \in Q\}).$$

En outre, on a

$$0 \leq \varphi_{1,j}(x_1) \leq \mu_2(\{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2\}) = \psi_1(x_1).$$

Or on a vu que $\int_{X_1} \psi_1 d\mu_1 = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ (qui est fini ici). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui donne

$$\int_{X_1} \varphi_{1,j} d\mu_1 \rightarrow \int_{X_1} \varphi_1 d\mu_1 \quad \text{et} \quad \int_{X_2} \varphi_{2,j} d\mu_2 \rightarrow \int_{X_2} \varphi_2 d\mu_2.$$

Comme $Q_j \in \mathcal{R}$, on a $\int_{X_1} \varphi_{1,j} d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_{2,j} d\mu_2$ et le résultat (iv). La σ -finitude de X_1 implique qu'il existe une suite $X_{1,k}$ d'éléments de \mathcal{M}_1 telle que

$$X_1 = \cup_{k \in \mathbb{N}} X_{1,k}, \quad \mu_1(X_{1,k}) < \infty.$$

On peut en outre supposer que les $X_{1,k}$ sont deux à deux disjoints. On notera $X_{2,l}$ une suite ayant les propriétés correspondantes pour $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$. Soit \mathcal{S} la classe des $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ tels que

$$\forall (k, l), \quad A \cap (X_{1,k} \times X_{2,l}) \in \mathcal{R}.$$

Alors, \mathcal{S} est une classe monotone i.e. si (A_j) est une suite croissante d'éléments de \mathcal{S} , (B_j) une suite décroissante d'éléments de \mathcal{S} ,

$$\cup_j A_j \in \mathcal{S}, \quad \cap_j B_j \in \mathcal{S}.$$

Soit en effet $A_j \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ une suite croissante telle que $A_j \cap (X_{1,k} \times X_{2,l}) \in \mathcal{R}$. D'après (ii), on obtient le résultat. De même la propriété (iv) et le fait que $\mu_1(X_{1,k}), \mu_2(X_{2,l})$ soient finis impliquent la propriété sur les B_j . Par suite, \mathcal{S} est une classe monotone incluse dans $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, qui contient les rectangles (propriété (i)) et les réunions disjointes dénombrables de rectangles (d'après (iii)).

LEMME 4.2.2. *$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la plus petite classe monotone qui contient les réunions finies de rectangles.*

Admettons provisoirement ce lemme. Il vient alors que $\mathcal{S} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Donc si $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, $A \cap (X_{1,k} \times X_{2,l})$ vérifie les conclusions du lemme 4.2.1. Par suite, de (iii), il vient, comme $A = \cup_{k,l} A \cap (X_{1,k} \times X_{2,l})$ (réunion disjointe), $A \in \mathcal{R}$, ce qui achève la preuve du lemme 4.2.1.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.2.2. $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est une tribu, donc une classe monotone ; en outre il est immédiat que si $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille de classes monotones sur X , alors $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est aussi une classe monotone. On peut donc considérer la classe monotone \mathcal{T} définie comme

\mathcal{T} = intersection des classes monotones contenant les réunions finies de rectangles.

Comme $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est une classe monotone contenant les réunions finies de rectangles, on obtient que

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \supset \mathcal{T}.$$

On doit donc prouver l'autre inclusion pour obtenir le lemme 4.2.2. Notons que si nous démontrons que \mathcal{T} est une tribu, on obtient le résultat car \mathcal{T} contient les rectangles, donc la tribu engendrée par les rectangles, c'est à dire $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Il suffit par conséquent de prouver que \mathcal{T} est une tribu. Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) &= (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2), \\ (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) &= [(A_1 \setminus B_1) \times A_2] \cup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)]. \end{aligned}$$

On voit donc que la différence de deux rectangles est une réunion disjointe de deux rectangles. Par suite la différence symétrique de deux rectangles est réunion disjointe de quatre rectangles, la réunion de deux rectangles est réunion disjointe de cinq rectangles. Il vient que l'ensemble \mathcal{E} des réunions finies disjointes de rectangles est stable par réunion, intersection et différence symétrique. Pour $P \subset X_1 \times X_2$, on pose

$$\Omega(P) = \{Q \subset X_1 \times X_2, P \setminus Q, Q \setminus P, P \cup Q \in \mathcal{T}\}.$$

On obtient immédiatement que

$$(4.2.1) \quad Q \in \Omega(P) \iff P \in \Omega(Q).$$

En outre si Q_j est une suite croissante de $\Omega(P)$ et $Q = \cup_j Q_j$, on a

$$P \setminus Q = P \cap Q^c = P \cap \cap_j Q_j^c = \cap_j (P \cap Q_j^c),$$

et comme $P \cap Q_j^c$ est décroissante et dans \mathcal{T} (qui est une classe monotone), on trouve que $P \setminus Q \in \mathcal{T}$; on prouve de même que $Q \setminus P, P \cup Q \in \mathcal{T}$. Par suite $\Omega(P)$ est une classe

monotone. Soit $P \in \mathcal{E}$: si $Q \in \mathcal{E}$, on a $Q \in \Omega(P)$ puisqu'on a vu que \mathcal{E} est stable par réunion, intersection et différence symétrique. Il vient que

$$\mathcal{E} \subset \Omega(P) \text{ pour } P \in \mathcal{E}.$$

Comme $\Omega(P)$ est une classe monotone, il vient par définition de \mathcal{T}

$$\mathcal{T} \subset \Omega(P) \text{ pour } P \in \mathcal{E}.$$

Par conséquent, si $Q \in \mathcal{T}$, on a de (4.2.1) pour $P \in \mathcal{E}$, $P \in \Omega(Q)$ d'où

$$\mathcal{E} \subset \Omega(Q).$$

Comme $\Omega(Q)$ est une classe monotone, il vient

$$\mathcal{T} \subset \Omega(Q) \text{ pour } Q \in \mathcal{T}.$$

Finalement, pour $P, Q \in \mathcal{T}$, on a $\mathcal{T} \subset \Omega(Q)$ ce qui implique que $P \setminus Q, Q \setminus P, P \cup Q \in \mathcal{T}$. On obtient alors

$$X_1 \times X_2 \in \mathcal{E} \subset \mathcal{T},$$

$$\text{si } Q \in \mathcal{T}, Q^c = \left(\underbrace{X_1 \times X_2}_{\in \mathcal{T}} \setminus \overbrace{Q}^{\in \mathcal{T}} \right) \in \mathcal{T},$$

$$(Q_j \in \mathcal{T})_{j \in \mathbb{N}}, P_n = \cup_{1 \leq j \leq n} Q_j \in \mathcal{T}, \text{ classe monotone, donc } \cup_n P_n \in \mathcal{T},$$

ce qui démontre que \mathcal{T} est une tribu, prouvant par conséquent le lemme 4.2.2.

DÉFINITION 4.2.3. PRODUIT TENSORIEL DE MESURES σ -FINIES. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés où les μ_j sont des mesures positives et σ -finies. Pour $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, on pose, en utilisant la notation (4.1.1) et le lemme 4.2.1

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A(x_1, \cdot)) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A(\cdot, x_2)) d\mu_2(x_2).$$

Alors, $\mu_1 \otimes \mu_2$ est une mesure σ -finie et, de la démonstration du lemme 4.2.1, on déduit que, pour $A_j \in \mathcal{M}_j$, $j = 1, 2$, $(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

En effet, si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, si $x_1 \in X_1$, $A_k(x_1, \cdot)$ est mesurable (proposition 4.1.3 (b)) et l'on a, en utilisant la notation (4.1.1),

$$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)(x_1, \cdot) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overbrace{A_k(x_1, \cdot)}^{\text{deux à deux disjoints}}$$

et par conséquent,

$$(4.2.2) \quad \mu_2\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)(x_1, \cdot)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_2(A_k(x_1, \cdot)).$$

Le lemme 4.2.1 implique que les applications $x_1 \mapsto \mu_2(A_k(x_1, \cdot))$ sont mesurables et le corollaire 1.6.2 fournit

$$\begin{aligned} (\mu_1 \otimes \mu_2)(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) &\stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \int_{X_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)(x_1, \cdot)\right) d\mu_1(x_1) \\ &\stackrel{(4.2.2)}{=} \int_{X_1} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_2(A_k(x_1, \cdot))\right) d\mu_1(x_1) \\ &\stackrel{\text{cor.1.6.2}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{X_1} \mu_2(A_k(x_1, \cdot)) d\mu_1(x_1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_k), \text{ qed.} \end{aligned}$$

De plus, la mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ est σ -finie car si pour $j = 1, 2$, $X_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_{j,k}$ avec $X_{j,k} \in \mathcal{M}_j$ et $\mu_j(X_{j,k}) < +\infty$, on a

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} (X_{1,k} \times X_{2,l}), \quad (\mu_1 \otimes \mu_2)(X_{1,k} \times X_{2,l}) = \mu_1(X_{1,k})\mu_2(X_{2,l}) < +\infty.$$

THÉORÈME 4.2.4. THÉORÈME DE TONELLI. *Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés où les μ_j sont des mesures positives et σ -finies. Soit $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application mesurable (le produit $X_1 \times X_2$ est muni de la tribu $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$). D'après la proposition 4.1.3(a), les applications $X_2 \ni x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$, $X_1 \ni x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ sont mesurables et l'on peut définir*

$$f_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2), \quad f_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1).$$

Alors, les applications f_j sont mesurables et

$$(4.2.3) \quad \int_{X_1} f_1(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} f_2(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2).$$

PROOF. La notation suivante est probablement plus lisible pour (4.2.3):

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \\ &= \iint_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que $f = \mathbf{1}_Q$ avec $Q \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. La définition 4.2.3 donne le résultat cherché. Par suite, on obtient également ce résultat pour les fonctions étagées sur $X_1 \times X_2$ (déf. 1.3.2). Du théorème d'approximation 1.3.3, il vient l'existence d'une suite de fonctions étagées $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur $X_1 \times X_2$ telle que, pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

$$0 \leq s_k(x_1, x_2) \nearrow f(x_1, x_2) \quad (\nearrow \text{ signifie tend en croissant}).$$

Posons

$$s_{k,1}(x_1) = \int_{X_2} s_k(x_1, x_2) d\mu_2(x_2), \quad s_{k,2}(x_2) = \int_{X_1} s_k(x_1, x_2) d\mu_1(x_1).$$

Comme s_k est étagée, nous avons déjà prouvé que

$$(4.2.4) \quad \int_{X_1} s_{k,1} d\mu_1 = \int_{X_2} s_{k,2} d\mu_2 = \int_{X_1 \times X_2} s_k d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Il vient alors du théorème de Beppo Levi (th. 1.6.1) sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ que

$$(4.2.5) \quad \lim_k \int_{X_1 \times X_2} s_k d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Pour $x_1 \in X_1$, le théorème de Beppo Levi sur $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$, appliqué à la suite positive croissante $s_k(x_1, x_2)$ donne

$$0 \leq s_{k,1}(x_1) = \int_{X_2} s_k(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \nearrow \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = f_1(x_1).$$

Le théorème de Beppo Levi sur $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, appliqué à la suite positive croissante $s_{k,1}(x_1)$ donne alors

$$(4.2.6) \quad \lim_k \int_{X_1} s_{k,1} d\mu_1 = \int_{X_1} f_1 d\mu_1.$$

On obtient donc

$$\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \stackrel{(4.2.5)}{=} \lim_k \int_{X_1 \times X_2} s_k d(\mu_1 \otimes \mu_2) \stackrel{(4.2.4)}{=} \lim_k \int_{X_1} s_{k,1} d\mu_1 \stackrel{(4.2.6)}{=} \int_{X_1} f_1 d\mu_1,$$

et on démontre de même que $\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_2} f_2 d\mu_2$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Le lemme 1.2.11 sur les séries doubles à termes dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ constitue une version très élémentaire du théorème de Tonelli.

THÉORÈME 4.2.4. THÉORÈME DE FUBINI. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés où les μ_j sont des mesures positives et σ -finies. Soit $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application mesurable.

(a) Si $\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)| d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) < +\infty$, alors $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$.

(b) Si $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$, alors $f(x_1, \cdot) \in L^1(\mu_2)$ μ_1 -pp en x_1 et $f(\cdot, x_2) \in L^1(\mu_1)$ μ_2 -pp en x_2 et

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \\ &= \iint_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Pour le (a), il suffit d'appliquer le théorème de Tonelli à $|f|$. Pour le (b), commençons par supposer que f est à valeurs réelles. Alors, on a $f = f_+ - f_-$ avec $f_{\pm} \geq 0$, $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. Il vient du théorème de Tonelli et de l'hypothèse de (b)

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_+(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f_+(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \\ (4.2.7) \quad &= \iint_{X_1 \times X_2} f_+(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) < +\infty, \end{aligned}$$

et la même identité pour f_- . Il vient donc que les fonctions \mathcal{M}_1 mesurables $(f_+)_1, (f_-)_1$ appartiennent à $L^1(\mu_1)$ (on définit comme dans le th.1.2.4 pour $g : X_1 \times X_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, $g_1(x_1) = \int_{X_2} g(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$, $g_2(x_2) = \int_{X_1} g(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$). De la proposition 1.7.1(d), il vient que, μ_1 -pp, $(f_+)_1 < +\infty, (f_-)_1 < +\infty$. On obtient de même que μ_2 -pp, $(f_+)_2 < +\infty, (f_-)_2 < +\infty$. Comme on a en outre

$$|f(x_1, x_2)| = f_+(x_1, x_2) + f_-(x_1, x_2),$$

on trouve la première partie de (b). En appliquant les identités (4.2.7) pour f_+ et f_- , il vient l'identité de (b) en effectuant une combinaison linéaire de réels. Si f est à valeurs complexes, on peut considérer séparément les parties réelles et imaginaires qui vérifient chacune les hypothèses de (b) et auxquelles on peut par conséquent appliquer le résultat précédent.

REMARQUE 4.2.6. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés où les μ_j sont des mesures positives et σ -finies. Soient $f_j : X_j \rightarrow \mathbb{C}, j = 1, 2$ des applications de

$L^1(\mu_j)$. On définit sur $X_1 \times X_2$, l'application $f_1 \otimes f_2$ par $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$. Cette application est mesurable d'après la remarque 4.1.2 et le théorème 4.2.4 implique immédiatement que $f_1 \otimes f_2$ appartient à $L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ et

$$\iint_{X_1 \times X_2} (f_1 \otimes f_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \left(\int_{X_1} f_1 d\mu_1 \right) \left(\int_{X_2} f_2 d\mu_2 \right).$$

4.3. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d

Nous avons construit dans le paragraphe 2.4 la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Dans ce paragraphe, nous souhaitons comparer celle-ci au produit tensoriel des mesures de Lebesgue sur \mathbb{R} , ceci pour nous permettre de ramener le calcul d'intégrales multiples à celui d'une succession d'intégrales simples.

THÉORÈME 4.3.1. *Soient d_1, d_2 des entiers ≥ 1 . On pose $d = d_1 + d_2$. On désigne par m_d la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d (cf.§2.4) et \mathcal{L}_d la tribu de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Alors $\mathcal{L}_d \supset \mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}$ et m_d coïncide avec $m_{d_1} \otimes m_{d_2}$ sur $\mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}$.*

DÉMONSTRATION. En utilisant les notations de la définition 1.1.3 pour la tribu engendrée, il vient du lemme 1.2.4 et de la remarque 4.1.4

$$(4.3.1) \quad \mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2} = \mathcal{B}_d = \mathcal{M}(\text{Pavés}) \subset \mathcal{M}(\text{Rectangles}) = \mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}.$$

De plus, du lemme 2.4.2, il vient que si $E_j \in \mathcal{L}_{d_j}, j = 1, 2$, il existe A_j de type F_σ et B_j de type G_δ tels que $A_j \subset E_j \subset B_j, m_{d_j}(B_j \setminus A_j) = 0$. Par suite, on a

$$\underbrace{A_1 \times \mathbb{R}^{d_2}}_{F_\sigma} \subset E_1 \times \mathbb{R}^{d_2} \subset \underbrace{B_1 \times \mathbb{R}^{d_2}}_{G_\delta}.$$

Il suffit alors de démontrer que

$$(4.3.2) \quad m_d((B_1 \setminus A_1) \times \mathbb{R}^{d_2}) = 0,$$

car on aura alors $E_1 \times \mathbb{R}^{d_2} \in \mathcal{L}_d$ d'après le lemme 2.4.2, et de même $\mathbb{R}^{d_1} \times E_2 \in \mathcal{L}_d$, de sorte que $E_1 \times E_2 \in \mathcal{L}_d$, ce qui implique $\mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2} = \mathcal{M}(\text{Rectangles}) \subset \mathcal{L}_d$. Pour obtenir (4.3.2), il suffit de démontrer, en utilisant la proposition 1.4.2(b), que, pour tout $M \geq 0$,

$$(4.3.3) \quad m_d((B_1 \setminus A_1) \times \{x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}, |x_2| \leq M\}) = 0.$$

On remarque alors que $m_{d_1} \otimes m_{d_2}$ est une mesure positive définie sur $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2}$ et est finie sur les compacts car, si K est un compact de \mathbb{R}^d , il est inclus dans un produit $\beta_1 \times \beta_2$ avec $\beta_j = \{x_j \in \mathbb{R}^{d_j}, |x_j| \leq M\}$ et par suite

$$(m_{d_1} \otimes m_{d_2})(K) \leq (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(\beta_1 \times \beta_2) = m_{d_1}(\beta_1)m_{d_2}(\beta_2) < +\infty.$$

En outre, du théorème 2.4.1(b) et de la définition 4.2.3, il vient

$$(m_{d_1} \otimes m_{d_2})([0, 1]^d) = m_{d_1}([0, 1]^{d_1})m_{d_2}([0, 1]^{d_2}) = 1.$$

De plus, $m_{d_1} \otimes m_{d_2}$ est invariante par translation, car si $E \in \mathcal{B}_d$ et $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, on a

$$\begin{aligned} (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(E + t) &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \mathbf{1}_{E+(t_1, t_2)}(x_1, x_2) dm_{d_2}(x_2) \right) dm_{d_1}(x_1) \\ \text{invariance par transl. de } m_{d_2}: &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \mathbf{1}_{E+(t_1, t_2)}(x_1, x_2 + t_2) dm_{d_2}(x_2) \right) dm_{d_1}(x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \mathbf{1}_{E+(t_1, 0)}(x_1, x_2) dm_{d_2}(x_2) \right) dm_{d_1}(x_1) \\ \text{Fubini:} &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_{E+(t_1, 0)}(x_1, x_2) dm_{d_1}(x_1) \right) dm_{d_2}(x_2) \\ \text{invariance par transl. de } m_{d_1}: &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_{E+(t_1, 0)}(x_1 + t_1, x_2) dm_{d_1}(x_1) \right) dm_{d_2}(x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x_1, x_2) dm_{d_1}(x_1) \right) dm_{d_2}(x_2) = (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(E). \end{aligned}$$

Par suite, d'après le théorème 2.4.1, les mesures $m_{d_1} \otimes m_{d_2}$ et m_d coïncident sur \mathcal{B}_d . Ceci implique (4.3.3) car $m_{d_1}(B_1 \setminus A_1) = 0$. Nous avons donc démontré

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d &= \mathcal{B}_{d_1} \otimes \mathcal{B}_{d_2} \subset \mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2} \subset \mathcal{L}_d, \\ A \in \mathcal{B}_d &\implies (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(A) = m_d(A). \end{aligned}$$

En outre, si $Q \in \mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}$, comme $Q \in \mathcal{L}_d$, il existe A de type F_σ , B de type G_δ tels que $A \subset Q \subset B$, $m_d(B \setminus A) = 0$. On en déduit, comme A est un borélien

$$m_d(Q) = \overbrace{m_d(Q \setminus A)}^{\leq m_d(B \setminus A) = 0} + m_d(A) = (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(A).$$

En outre, comme $B \setminus A$ est un borélien, on a

$$(m_{d_1} \otimes m_{d_2})(Q) = \overbrace{(m_{d_1} \otimes m_{d_2})(Q \setminus A)}^{\leq (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(B \setminus A) = m_d(B \setminus A) = 0} + (m_{d_1} \otimes m_{d_2})(A)$$

et par conséquent m_d coïncide avec $m_{d_1} \otimes m_{d_2}$ sur $\mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}$, ce qui achève la démonstration.

Notes

Le lecteur attentif aura bien évidemment remarqué que le paragraphe 4.1 aurait pu être intégré dans le paragraphe 1.1 du chapitre 1. Toutefois, nous avons souhaité alléger autant que possible la partie abstraite du chapitre 1 et attendre d'avoir à introduire les intégrales “multiples” pour décrire les tribus produits.

On a vu dans le dernier paragraphe la démonstration du théorème 4.3.1 avec en particulier la preuve de l'inclusion $\mathcal{L}_{d_1+d_2} \supset \mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}$. On peut démontrer que cette inclusion est stricte car la tribu de Lebesgue \mathcal{L}_d est *complète* (propriété (e) du théorème 2.2.1), ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}$. Néanmoins, on peut démontrer que l'espace mesuré

$$(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, \mathcal{L}_{d_1+d_2}, m_{d_1+d_2})$$

est le complété de l'espace mesuré $(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}, \mathcal{L}_{d_1} \otimes \mathcal{L}_{d_2}, m_{d_1} \otimes m_{d_2})$.

Guido **Fubini** (1879–1943) est l'un des plus grands mathématiciens italiens; chassé d'Italie en 1938 par les lois antisémites du fascisme mussolinien, il s'exila aux USA où l'*Institute of Advanced Studies* de Princeton lui offrit une position. Leonida **Tonelli** (1885–1946) est également un mathématicien italien.