5. DIFFÉOMORPHISMES D'OUVERTS DE $\mathbb{R}^d$ ET INTÉGRATION

5.1. Différentiabilité

DÉFINITION 5.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $r_0 > 0$ et une application $\epsilon : B(0, r_0) \to \mathbb{R}^m$ tels que, pour tout $|h| < r_0$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \epsilon(h)|h|, \quad \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0. \tag{5.1.1}$$

Ici $|h|$ désigne la norme euclidienne du vecteur h. Dans ces conditions, on dit que A est *la* différentielle de f en x_0 et on écrit $f'(x_0) = A$.

Remarquons que ceci est cohérent car si, pour un $r_0 > 0$ et pour tout $|h| < r_0$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A_1 h + \epsilon_1(h)|h|, \quad \lim_{h\to 0} \epsilon_1(h) = 0,$$
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A_2 h + \epsilon_2(h)|h|, \quad \lim_{h\to 0} \epsilon_2(h) = 0,$$

il vient $(A_1 - A_2)h = (\epsilon_1(h) - \epsilon_2(h))|h|$ et donc, pour tout $T \in \mathbb{R}^n$ tel que $|T| = 1$ et $s \in (-r_0, r_0)$,

$$(A_1 - A_2)T = \epsilon_1(sT) - \epsilon_2(sT) = \lim_{s\to 0}\big(\epsilon_1(sT) - \epsilon_2(sT)\big) = 0, \quad \text{i.e. } A_1 = A_2.$$

REMARQUES 5.1.2.

(a) Remarquons également que $f'(x_0)$ est une matrice $m \times n$ (avec m lignes et n colonnes) comme application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

(b) Si f est différentiable en un point x, alors les *dérivées partielles* $\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\Big)_{1\le j\le n}$ de f existent, i.e. pour tout $1 \le j \le n$, $\mathbf{e}_j$ étant le $j$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x + t\mathbf{e}_j) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

En effet, comme f est différentiable en x, on a $f(x_0 + te_j) = f(x_0) + A(te_j) + \epsilon(te_j)|t|$, et par conséquent pour $0 < |t| < r_0$, on a

$$\big(f(x + te_j) - f(x)\big)t^{-1} = Ae_j + \epsilon(te_j)|t|t^{-1},$$

ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Ae_j = f'(x)e_j$ et donc

$$f'(x)h = f'(x)\big(\sum_{1\le j\le n} h_j e_j\big) = \sum_{1\le j\le n} h_j f'(x)e_j = \sum_{1\le j\le n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j.$$

La formule (5.1.1) de Taylor-Young à l'ordre 1 s'écrit donc pour $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, |h| < r_0$,

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j + \epsilon(h)|h|. \tag{5.1.2}$$

Remarquons que $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big)$ appartient à $\mathbb{R}^m$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}. \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice $f'(x)$ est la matrice $m \times n$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

(c) Réciproquement, l'existence de dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité comme le montre l'exemple suivant. On pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \ne (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est discontinue en 0 (pour $\epsilon \ne 0$, on a $f(\epsilon,\epsilon) = 1/2$) et par conséquent n'est pas différentiable en 0 (la formule (5.1.1) implique en particulier la continuité en x_0). Néanmoins, on a $f(x,0) = 0, f(0,y) = 0$, ce qui implique en particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$.

(d) En revanche si les dérivées partielles existent et sont continues sur un ouvert U, alors f est différentiable sur U. En effet, soit $x \in U$; il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,r)$ soit incluse dans U. Pour $h = (h_1, \dots h_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $|h| < r$, considérons

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(x + \sum_{1 \le j \le n} h_j e_j) - f(x + \sum_{2 \le j \le n} h_j e_j) \\ &\quad + f(x + \sum_{2 \le j \le n} h_j e_j) - f(x + \sum_{3 \le j \le n} h_j e_j) \\ &\quad \dots \\ &\quad + f(x + h_n e_n) - f(x), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x+h)-f(x)-\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j =$$
$$\sum_{1\le j\le n}\Big(f\big(x+h_je_j+\sum_{j<k\le n}h_ke_k\big)-f\big(x+\sum_{j<k\le n}h_ke_k\big)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j\Big)=$$
$$\sum_{1\le j\le n}\Big(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\sum_{j<k\le n}h_ke_k+\theta h_je_j)d\theta h_j-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j\Big)=$$
$$\sum_{1\le j\le n}h_j\int_0^1\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}x+\sum_{j<k\le n}h_ke_k+\theta h_je_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\Big)d\theta.$$

Par conséquent, on a

$$\big|f(x+h)-f(x)-\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j\big|\le|h|\overbrace{\sum_{1\le j\le n}\sup_{\theta\in[0,1]}\Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\theta\sum_{j<k\le n}h_ke_k)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\Big|}^{=\eta(h)},$$

avec $\lim_{h\to 0}\eta(h)=0$, grâce à la continuité des dérivées partielles. Ceci démontre que f est différentiable en x.

Proposition 5.1.3. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f:U\to\mathbb{R}^m$ une application différentiable sur U. Alors, pour $x,y\in U$,*

$$|f(y)-f(x)|\le|y-x|\sup_{\theta\in[0,1]}|f'\big(x+\theta(y-x)\big)|.$$

Pour une matrice $m\times n$ A, on pose $|A|=\sup_{|T|_{\mathbb{R}^n}=1}|AT|_{\mathbb{R}^m}$, où $|T|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne du vecteur $T\in\mathbb{R}^d$.

démonstration. En considérant la fonction φ d'une variable $\theta\in[0,1]$ définie par

$$\varphi(\theta)=f\big(x+\theta(y-x)\big)$$

on calcule, pour $\theta,\theta+s\in[0,1]$

$$\varphi(\theta+s)=f\big(x+(\theta+s)(y-x)\big)$$

□

5.2. Tranformations linéaires

PROPOSITION 5.2.1. *Soit T un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^d$. Alors, si E est un borélien de $\mathbb{R}^d$, $T(E)$ l'est également. Pour $E \in \mathcal{B}_d$, on pose $\mu(E) = m_d\big(T(E)\big)$. Alors, $\mu = m_d\big([0,1]^d\big)m_d$, i.e.*

$$m_d\big(T(E)\big) = m_d\big(T([0,1]^d)\big)m_d(E). \tag{5.2.1}$$

DÉMONSTRATION. On note tout d'abord que $T(E) = (T^{-1})^{-1}(E)$ et que comme T^{-1} est continue (car linéaire) elle est mesurable au sens de Borel et par suite $(T^{-1})^{-1}(E) \in \mathcal{B}_d$ si $E \in \mathcal{B}_d$. En outre μ est effectivement une mesure borélienne (i.e. une mesure positive définie sur $\mathcal{B}_d$ et finie sur les compacts): $\mu(\emptyset) = m_d(T(\emptyset)) = m_d(\emptyset) = 0$, et si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints alors, comme T est injectif, pour $k \neq l$, $\emptyset = T(E_k \cap E_l) = T(E_k) \cap T(E_l)$, et

$$\mu\big(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k\big) = m_d\big(T(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k)\big) = m_d\big(\cup_{k\in\mathbb{N}} T(E_k)\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_d\big(T(E_k)\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k).$$

De plus, si K est compact, on a $\mu(K) = m_d\big(\overbrace{T(K)}^{\text{compact}}\big) < +\infty$. De plus, μ est invariante par translation car, si $x \in \mathbb{R}^d$ et $E \in \mathcal{B}_d$,

$$\mu(E + x) = m_d\big(T(E + x)\big) = m_d\big(T(E) + Tx\big) = m_d\big(T(E)\big) = \mu(E).$$

Remarquons également que

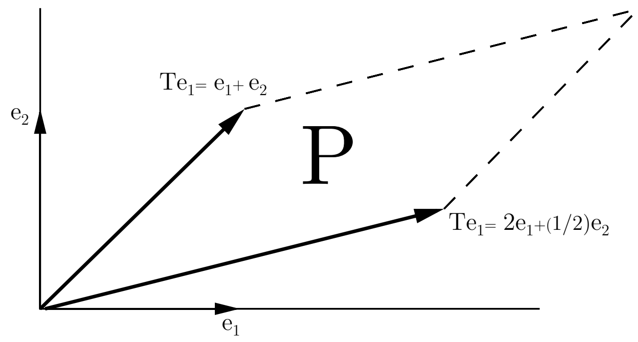
$$\mu\big([0,1]^d\big) = \mu\big([-1/2,1/2]^d\big) = m_d\Big(T\big([-1/2,1/2]^d\big)\Big) \geq m_d\Big(\overbrace{(T^{-1})^{-1}\big(]-1/2,1/2[^d\big)}^{\text{ouvert contenant } 0}\Big) > 0,$$

la dernière inégalité étant une conséquence du (a) du théorème 2.4.1. Ce théorème implique donc que, pour $E \in \mathcal{B}_d$, on a

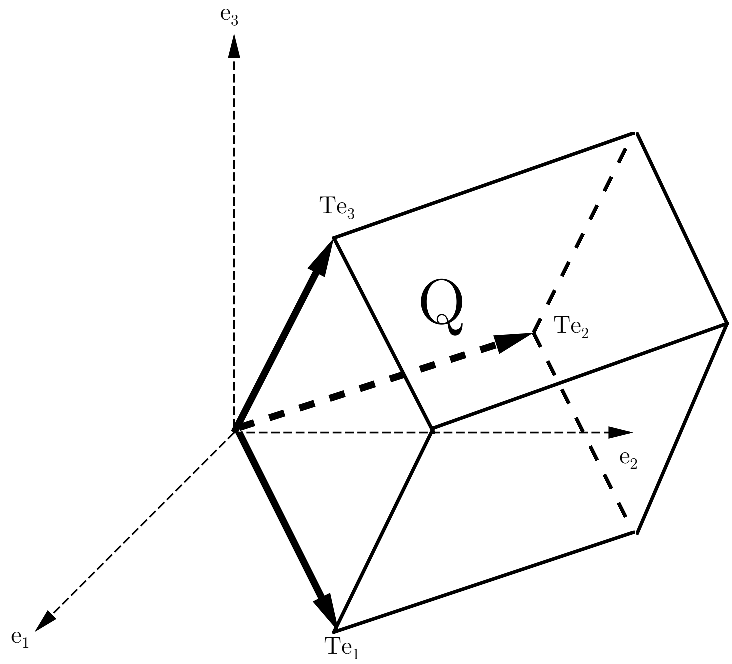
$$\frac{\mu(E)}{\mu\big([0,1]^d\big)} = m_d(E), \quad \text{i.e.} \quad \mu(E) = m_d\big(T([0,1]^d)\big)m_d(E). \quad \square$$

PROPOSITION 5.2.2. *Soit T un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$. Alors $m_d\big(T([0,1]^d)\big) = |\det T|$.*

Par exemple, pour $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, le déterminant vaut $3/2$ et est égal à la surface du parallélogramme P de la figure suivante



De manière analogue, pour $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$, le déterminant vaut $5/16$ et est égal au volume du parallépipède Q de la figure suivante



DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Posons $\Delta_T = m_d\big(T([0,1]^d)\big)$. On a vu dans la démonstration précédente que $\Delta_T > 0$ et $m_d(T(E)) = \Delta_T m(E)$. Pour des isomorphismes

T_1, T_2, il vient, en posant $Q_1 = [0,1]^d$,

$$\begin{aligned}(5.2.2)\quad \Delta_{T_2T_1} = m_d\big((T_2T_1)(Q_1)\big) = m_d\big(T_2\big(T_1(Q_1)\big)\big) &= \Delta_{T_2} m_d\big(T_1(Q_1)\big)\\ &= \Delta_{T_2}\Delta_{T_1} m_d(Q_1) = \Delta_{T_2}\Delta_{T_1},\end{aligned}$$

et l'on a également $\Delta_{\mathrm{Id}} = 1$. Nous cherchons à prouver la formule

$$\Delta_T = m_d\big(T([0,1]^d)\big) = |\det T|. \tag{5.2.3}$$

pour toute matrice inversible T (la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$).

(i) Cette formule est vérifiée pour T diagonale. En effet si

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_d \end{pmatrix},$$

on a, si tous les a_j sont strictement positifs, $T(Q_1) = \prod_{1\le j\le d}[0, a_j]$ et le (a) du théorème 2.4.1 implique $m_d\big(T(Q_1)\big) = \prod_{1\le j\le d} a_j = |\det T|$. Si certains a_j sont strictement négatifs, on doit remplacer dans $T(Q_1)$ l'intervalle $[0, a_j]$ par $[a_j, 0]$ et le résultat est inchangé.

(ii) Cette formule est vérifiée pour T symétrique, i.e. si $T = {}^tT$. En effet, T est alors diagonalisable dans une base orthonormée: il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que ${}^tPP = I, D = P^{-1}TP$. Il vient alors de (5.2.2) et de (i)

$$\Delta_T = \Delta_{PDP^{-1}} = \Delta_P \Delta_D \Delta_{P^{-1}} = \Delta_D = |\det D| = |\det T|.$$

(iii) Cette formule est vérifiée si T est une isométrie, i.e. si ${}^tTT = I$ (ce qui implique $|\det T| = 1$). En effet, en notant B_1 la boule unité euclidienne fermée de $\mathbb{R}^d$, on a $T(B_1) = B_1$ car, pour $x \in B_1$, $\|Tx\| = \|x\| \le 1$ et réciproquement $x = TT^{-1}x$ avec $\|T^{-1}x\| = \|TT^{-1}x\| = \|x\| \le 1$. De la proposition 5.2.1, il vient alors

$$m_d(B_1) = m_d\big(T(B_1)\big) = \Delta_T m_d(B_1) \Longrightarrow \Delta_T = 1,$$

car $m_d(B_1) > 0$ puisque B_1 contient un ouvert non vide.

(iv) Cette formule est vérifiée en général. Soit T une matrice inversible. Alors la matrice ${}^tTT$ est définie positive, i.e. symétrique avec des valeurs propres strictement positives. Il existe donc une matrice P telle que ${}^tPP = I$, une matrice diagonale définie positive D telles que

$$ {}^tTT = {}^tPDP \text{ (qui implique } (\det T)^2 = \det D). \quad \text{On pose} \quad |T| = {}^tPD^{1/2}P. $$

Alors $|T|$ est inversible (produit de matrices inversibles) et $T|T|^{-1}$ est une isométrie car

$$ \begin{aligned} {}^t\big(T|T|^{-1}\big)T|T|^{-1} = {}^t\big(|T|^{-1}\big){}^tTT|T|^{-1} &= {}^t\big(P^{-1}D^{-1/2}({}^tP)^{-1}\big){}^tPDPP^{-1}D^{-1/2}({}^tP)^{-1} \\ &= P^{-1}D^{-1/2}({}^tP^{-1}){}^tPDD^{-1/2}({}^tP)^{-1} = P^{-1}({}^tP)^{-1} = I. \end{aligned} $$

Par conséquent, comme $T = T|T|^{-1}|T|$, il vient de (iii), (i), (ii)

$$ \Delta_T = \Delta_{T|T|^{-1}}\Delta_{|T|} = \Delta_{|T|} = \Delta_{D^{1/2}} = |\det D^{1/2}| = |\det T|, $$

la dernière égalité étant due à l'identité $(\det T)^2 = \det D = (\det D^{1/2})^2$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.2.2 qui implique avec (5.2.1), pour $E \in \mathcal{B}_d$ et T isomorphisme de $\mathbb{R}^d$,

$$ \begin{aligned} &(5.2.4) \quad m_d(T(E)) = |\det T| m_d(E), \\ &\text{i.e. } \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{T(E)}(y)dy = m_d(T(E)) = |\det T| \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{T(E)}(Tx)|\det T|dx. \end{aligned} $$

PROPOSITION 5.2.3. *Soient T un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \circ T \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$ \int_{\mathbb{R}^d} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(Tx)|\det T|dx. \tag{5.2.5} $$

Commençons par une remarque triviale: c'est bien la valeur absolue du déterminant qui doit apparaître dans la formule (5.2.5) et cela ne contredit pas ce que le lecteur sait certainement déjà sur les changements de variables dans les intégrales simples. Prenons un exemple simple avec une fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$. On a bien

$$ \int_{\mathbb{R}} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(-2x)2dx $$

car, en utilisant une méthode traditionnelle, on obtient

$$ \int_{\mathbb{R}} f(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-2x)(-2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-2x)2dx = \int_{\mathbb{R}} f(-2x)2dx $$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Rappelons tout d'abord que, pour $E \in \mathcal{B}_d$, on a $T^{-1}(E) \in \mathcal{B}_d$; de plus, si $m_d(E) = 0$, la formule (5.2.1) implique $m_d\big(T^{-1}(E)\big) = 0$ et par suite, si $A \subset E$, on a $T^{-1}(A) \subset T^{-1}(E)$ et donc $T^{-1}(A)$ est aussi négligeable. Considérons pour commencer une fonction f à valeurs positives. En utilisant le théorème d'approximation 1.3.3, on trouve une suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées tendant simplement en croissant vers f. Si $s_k = \sum_{1\le j\le N_k} \alpha_{j,k}\mathbf{1}_{A_{j,k}}$ (on peut supposer les $\alpha_{j,k} > 0$), du lemme 1.6.3 et de (5.2.4), il vient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} s_k(y)dy &= \sum_{1\le j\le N_k} \alpha_{j,k} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{A_{j,k}}(y)dy = \sum_{1\le j\le N_k} \alpha_{j,k} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{A_{j,k}}(Tx)|\det T|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{1\le j\le N_k} \alpha_{j,k}\mathbf{1}_{A_{j,k}}(Tx)\Big)|\det T|dx = \int_{\mathbb{R}^d} s_k(Tx)|\det T|dx.\end{aligned}$$

Le théorème 1.6.1 de Beppo Levi implique alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)dy = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} s_k(y)dy = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} s_k(Tx)|\det T|dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Tx)|\det T|dx.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la décomposition $f = (\operatorname{Re} f)_+ - (\operatorname{Re} f)_- + i(\operatorname{Im} f)_+ - i(\operatorname{Im} f)_-$ et le cas précédent permettent de terminer la démonstration de (5.2.5). $\square$

5.3 Formule du changement de variables

DÉFINITION 5.3.1. DIFFÉOMORPHISME DE CLASSE C^1. Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\kappa : U \to V$. On dit que κ est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V si c'est une bijection de classe C^1 ainsi que κ^{-1}. En tout point $x \in U$, l'application linéaire bijective $\kappa'(x)$ s'appelle la matrice jacobienne de κ et $\det\big(\kappa'(x)\big)$ s'appelle le jacobien. Rappelons que avec

$$U \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \kappa(x) = \big(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x)\big) \in V,$$

on a

$$(5.3.1) \qquad \kappa'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \kappa_1}{\partial x_n} \\ \dots & \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_j} & \dots \\ \frac{\partial \kappa_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \kappa_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{1\le i,j\le n}, \quad i \text{ indice de ligne, } j \text{ indice de colonne.}$$

En outre, si $\nu = \kappa^{-1}$, comme pour tout $x \in U$, $(\nu \circ \kappa)(x) = x$, on a

$$\nu'\big(\kappa(x)\big)\kappa'(x) = I, \quad \text{i.e.} \quad \nu'\big(\kappa(x)\big) = \kappa'(x)^{-1}.$$

REMARQUE 5.3.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ et $\kappa : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $\det \kappa'(x_0) \neq 0$. Alors, le *théorème d'inversion locale* assure qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 et un ouvert V_0 tels que $\kappa : U_0 \to V_0$ soit un difféomorphisme de classe C^1 de U_0 sur V_0. Ce résultat fondamental de calcul différentiel permet de ramener le problème local de l'inversibilité d'une application différentiable à un problème d'algèbre linéaire, celui de l'inversibilité d'une matrice $n \times n$, la matrice jacobienne.

PROPOSITION 5.3.3. *Soit $\kappa : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1 d'ouverts U, V de $\mathbb{R}^n$. Alors si A est un borélien de U, $\kappa(A)$ est un borélien de V. Si E est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de U, alors $\kappa(E)$ est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de V.*

DÉMONSTRATION. La première affirmation est immédiate car $\kappa(A) = (\kappa^{-1})^{-1}(A)$ et $\nu = \kappa^{-1}$ est continue, donc Borel-mesurable (proposition 1.2.3). Pour vérifier la seconde affirmation, il suffit de démontrer que

(5.3.2) si A est un borélien de mesure nulle, alors $\nu^{-1}(A)$ est aussi de mesure nulle.

En effet, on aura alors que si $E \subset A$, A borélien de mesure nulle, $\nu^{-1}(E) \subset \nu^{-1}(A) = B$, avec B borélien de mesure nulle. Comme la tribu de Lebesgue est engendrée par la tribu de Borel et les sous-ensembles des boréliens de mesure nulle, le lemme 1.1.4 permettra de conclure. La propriété (5.3.2) est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 5.3.4. *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\kappa : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1. Soit A un borélien de U. Alors $\kappa(A)$ est un borélien de V et, m désignant la mesure de Lebesgue, on a*

$$m(\kappa(A)) = \int_A |\det \kappa'(x)| dx.$$

De manière générale, pour $f \geq 0$ mesurable sur V

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\kappa(x)) |\det \kappa'(x)|\, dx.$$

DÉMONSTRATION. Soit P un pavé compact rationnel (produit d'intervalles compacts d'extrémités rationnelles de $\mathbb{R}$) inclus dans U. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité uniforme des applications continues sur le compact P, il existe δ (dépendant de ϵ et P) tel que[1]

$$\sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq \delta \\ x_1, x_2 \in P_0}} \|\kappa'(x_1) - \kappa'(x_2)\| + |\det \kappa'(x_1) - \det \kappa'(x_2)| \leq \delta.$$

On posera également

$$\sup_{x \in P} \left\|\kappa'(x)^{-1}\right\| = M \ (< \infty \text{ car P est compact}).$$

On peut écrire $P = \cup_{1 \leq j \leq N} Q_j$ où les Q_j sont des pavés compacts d'arête $\rho \leq \delta$ tels que $Q_j \cap Q_k$ soit inclus dans un hyperplan si $j \neq k$: comme $P = \prod_{1 \leq l \leq d} I_l$ où les I_l sont des intervalles compacts de $\mathbb{R}$, on peut écrire I_l comme réunion finie d'intervalles $I_{l,r}$ compacts de longueur[2] ρ, telle que pour $r \neq s$, $I_{l,r} \cap I_{l,s}$ soit vide ou réduit à un point. Par suite on obtient

$$P = \bigcup_{\substack{1 \leq r_1 \leq N_1 \\ \cdots \\ 1 \leq r_d \leq N_d}} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq l \leq d} I_{l,r_l} \right)}_{\text{pavés } Q}.$$

Soit a_j le centre de gravité du pavé Q_j égal par conséquent à $\{x,\ |x - a_j| \leq \rho/2\}$. Posons

$$\gamma(x) = \kappa'(a_j)^{-1} \kappa(x).$$

Pour $x \in Q_j$, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et la convexité de Q_j on obtient

$$|\gamma(x) - \gamma(a_j)| \leq \sup_{x \in Q_j} \left\|\kappa'(a_j)^{-1} \kappa'(x)\right\| \ |x - a_j|.$$

En outre, on a $\kappa'(a_j)^{-1}\kappa'(x) - \mathrm{Id} = \kappa'(a_j)^{-1}(\kappa'(x) - \kappa'(a_j))$ d'où

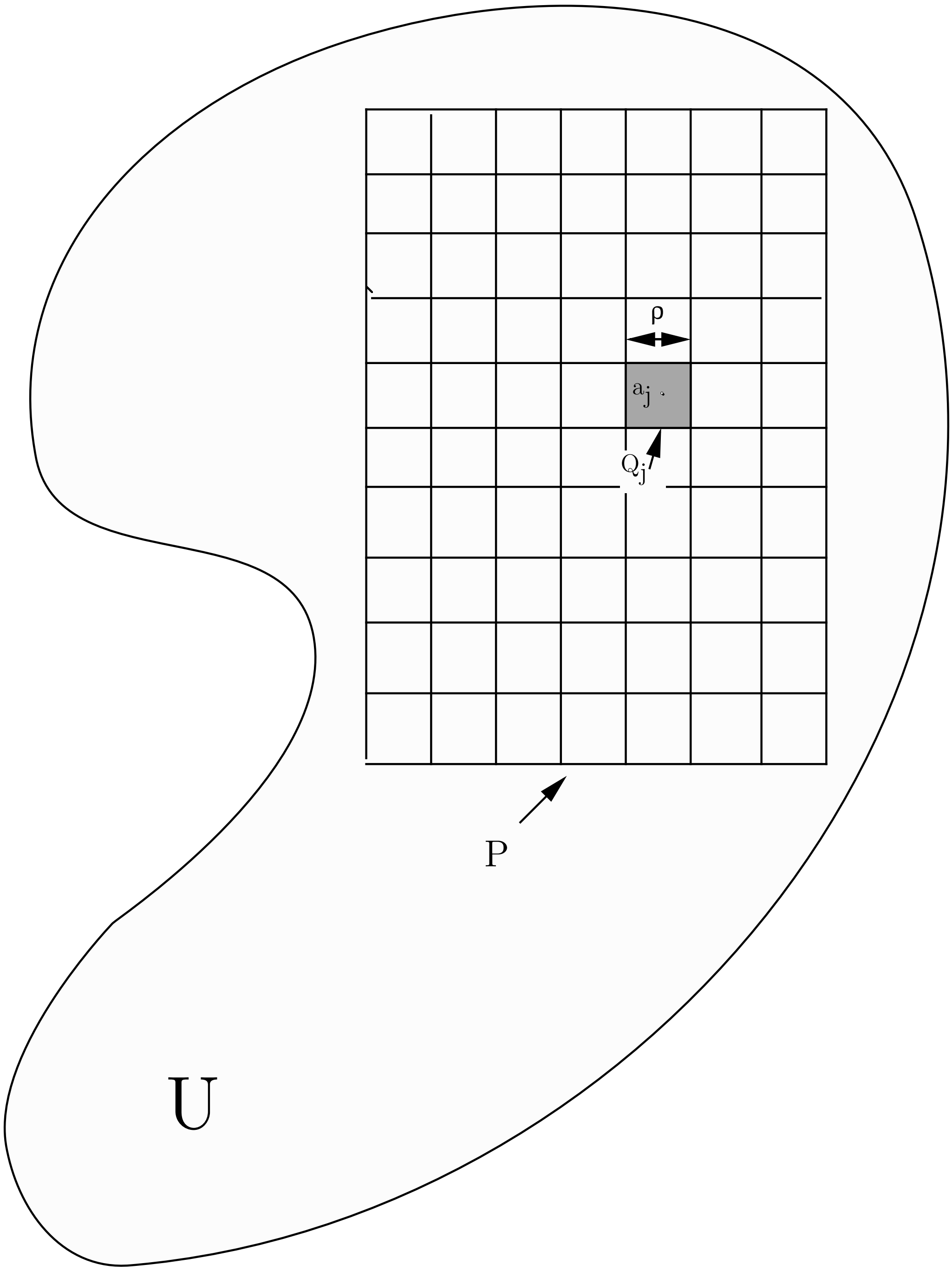
$$\left\|\kappa'(a_j)^{-1} \kappa'(x)\right\| \leq 1 + M\epsilon.$$

Ceci implique que

$$\sup_{x \in Q_j} |\gamma(x) - \gamma(a_j)| \leq (1 + M\epsilon)\rho/2,$$

[1] On notera $|x|$ la norm sup d'un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et si A est une matrice $d \times d$, on définit $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$.

[2] C'est possible car chacun des I_l est de longueur rationnelle m_l: il faut donc trouver des entiers $N_1, \ldots, N_d$ tels que $m_1/N_1 = \cdots = m_d/N_d \leq \delta$. Pour cela, il suffit de trouver l'entier N_1 tel que pour tous les $k \in \{1, \ldots, d\}$, $N_1 m_k/m_1 \in \mathbb{N}$. Comme les nombres m_k/m_1 sont rationnels, il suffit de prendre un multiple du produit des dénominateurs. Ceci assure l'égalité ci-dessus et l'inégalité est vérifiée pour un multiple asez grand.



et donc

$$m(\gamma(Q_j)) \leq (1 + M\epsilon)^d \rho^d = (1 + M\epsilon)^d m(Q_j).$$

On a vu que pour une application linéaire T et un borélien E,

$$m(T(E)) = |\det T|\ m(E).$$

Ceci implique que $m(\gamma(Q_j)) = |\det \kappa'(a_j)|^{-1} m(\kappa(Q_j))$ et par conséquent

$$m(\kappa(Q_j)) \leq |\det \kappa'(a_j)|(1 + M\epsilon)^d m(Q_j).$$

Comme par hypothèse, pour $x \in Q_j$, $|\det \kappa'(a_j)| \leq \epsilon + |\det \kappa'(x)|$, il vient

$$m(\kappa(Q_j)) \leq (\epsilon + |\det \kappa'(x)|)(1 + M\epsilon)^d m(Q_j).$$

En intégrant cette inégalité sur Q_j, on obtient

$$m(\kappa(Q_j))m(Q_j) \leq \Big(\epsilon m(Q_j) + \int_{Q_j} |\det \kappa'(x)| dx\Big)(1 + M\epsilon)^d m(Q_j),$$

ce qui donne

$$m(\kappa(Q_j)) \leq \Big(\epsilon m(Q_j) + \int_{Q_j} |\det \kappa'(x)| dx\Big)(1 + M\epsilon)^d.$$

Comme $P = \cup_{1\leq j\leq N} Q_j$, on a $\kappa(P) = \cup_{1\leq j\leq N} \kappa(Q_j)$; en outre on a

$$m(P) = \sum_{1\leq j\leq N} m(Q_j)$$

car $m(Q_j \cap Q_l) = \emptyset$ si $j \neq l$. On obtient par conséquent, pout tout $\epsilon > 0$

$$m(\kappa(P)) \leq \sum_{1\leq j\leq N} m(\kappa(Q_j)) \leq (1 + M\epsilon)^d \Big(\epsilon m(P) + \int_P |\det \kappa'(x)| dx\Big).$$

En prenant l'infimum sur $\epsilon > 0$, on trouve

$$m(\kappa(P)) \leq \int_P |\det \kappa'(x)| dx,$$

ceci pour tout pavé rationnel fermé.

Considérons maintenant un borélien A de U et Ω un ouvert de U contenant A. On a vu que l'on pouvait écrire Ω comme réunion dénombrable de pavés rationnels fermés. On peut également faire en sorte que ces pavés aient une intersection de mesure nulle lorsqu'ils sont distincts. Si $\Omega = \cup_{n\geq 1} P_n$, on pose

$$\tilde{P}_1 = P_1, \tilde{P}_2 = P_2 \backslash P_1, \ldots, \tilde{P}_{n+1} = P_{n+1} \backslash (\cup_{1\leq j\leq n} P_j).$$

On a alors

$$\cup_{n\geq 1}\tilde{P}_n = \cup_{n\geq 1}P_n$$

car d'une part $\tilde{P}_n \subset P_n$ et d'autre part si $x \in \Omega$ on pose $n(x) = \inf\{n, x \in P_n\}$: si $n(x) = 1, x \in P_1 = \tilde{P}_1$ et si $n(x) > 1$ alors $x \in \tilde{P}_{n(x)}$. En outre pour $k \geq 0$, $\tilde{P}_n \cap \tilde{P}_{n+1+k} = \emptyset$ car

$$\tilde{P}_n \cap \tilde{P}_{n+1+k} \subset P_n \cap P_n^c = \emptyset.$$

Par suite $(\tilde{P}_n)_{n\geq 1}$ forme une partition de Ω. Notons maintenant que si P_1, P_2 sont des pavés rationnels, alors $P_2 \backslash P_1$ est une réunion finie disjointe de pavés rationnels: c'est vrai en dimension 1, et en dimension $d+1$ on écrit avec A_1, A_2 pavés rationnels en dimension d, B_1, B_2 pavés rationnels en dimension 1,

$$P_1 = A_1 \times B_1,\ P_2 = A_2 \times B_2 \quad \text{d'où}$$
$$P_2\backslash P_1 = [(A_2\backslash A_1) \times B_2] \cup [(A_2 \cap A_1) \times (B_2\backslash B_1)].$$

Par hypothèse de récurrence $A_2\backslash A_1$ est une réunion finie disjointe de pavés rationnels, et c'est donc le cas de $(A_2\backslash A_1) \times B_2$. Comme $A_2 \cap A_1$ est un pavé rationnel en dimension d, que $B_2\backslash B_1$ est une réunion finie disjointe de pavés rationnels en dimension 1, et que la réunion ci-dessus est disjointe, on trouve que pour P_1, P_2 pavés rationnels, $P_2\backslash P_1$ est une réunion finie disjointe de pavés rationnels. Il vient par suite que l'ensemble des réunions finies disjointes de pavés rationnels est stable par intersection, différence, différence symétrique et par réunion. D'après ce qui précède, tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme réunion dénombrable disjointe de pavés rationnels : on utilise d'abord les P_n, puis les $\tilde{P}_n$ qui forment une partition de Ω, et on écrit chaque $\tilde{P}_n$ comme réunion finie disjointe de pavés rationnels. Notons que l'adhérence de $\tilde{P}_n$ est incluse dans l'adhérence de P_n qui est fermé inclus dans Ω. Comme $\tilde{P}_n$ est une réunion finie disjointe de pavés rationnels $R_{j,n}$ on a

$$\tilde{P}_n = \cup_{1\leq j\leq \nu_n} R_{j,n}, \qquad \text{et donc} \qquad \Omega \supset \overline{\tilde{P}_n} = \cup_{1\leq j\leq \nu_n}\overline{R_{j,n}}.$$

Finalement on trouve une partition dénombrable de Ω constituée de pavés rationnels d'adhérence incluse dans Ω. On peut donc écrire

$$\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$$

où les P_n sont des pavés rationnels fermés (l'adhérence d'un pavé rationnel est un pavé rationnel) tels que, pour $n \neq m$, $P_n \cap P_m$ est inclus dans un hyperplan car leurs intérieurs sont disjoints. Donc

$$m(\kappa(A)) \leq \sum_{\mathbb{N}} m(\kappa(P_n)) \leq \sum_{\mathbb{N}} \int_{P_n} |\det \kappa'(x)| dx = \int_{\Omega} |\det \kappa'(x)| dx.$$

Par régularité extérieure de la mesure $|\det \kappa'(x)| dx$ (le théorème de représentation de Riesz assure que la mesure de Radon $\varphi \in C_c(U) \to \int_U \varphi(x) |\det \kappa'(x)| dx$ fournit une mesure régulière qui est la mesure de densité $|\det \kappa'(x)|$ par rapport à la mesure de Lebesgue), il vient

$$m(\kappa(A)) \leq \int_A |\det \kappa'(x)| dx.$$

D'où pour B borélien de V, avec $A = \kappa^{-1}(B)$ on obtient

$$\int_V \mathbf{1}_B(y) dy = m(B) \leq \int_{\kappa^{-1}(B)} |\det \kappa'(x)| dx = \int_U \mathbf{1}_B(\kappa(x)) \; |\det \kappa'(x)| dx.$$

En utilisant le théorème de Beppo Levi et l'approximation par des fonctions étagées, on trouve pour $f \geq 0$ borélienne définie sur V

$$\int_V f(y) dy \leq \int_U f(\kappa(x)) \; |\det \kappa'(x)| dx.$$

En échangeant les rôles de U et V, il vient

$$\begin{aligned} \int_U f(\kappa(x)) \; |\det \kappa'(x)| dx &\leq \int_V f(\kappa(\nu(y))) \; |\det \kappa'(\nu(y))| |\det \nu'(y)| dy \\ &= \int_V f(y) dy. \end{aligned}$$

Maintenant si f est positive et Lebesgue-mesurable, elle est limite simple d'une suite de fonctions étagées qui coïncident presque partout avec des fonctions étagées boréliennes, donc $f = f_0$ presque partout avec f_0 borélienne positive. Comme l'image d'un borélien de mesure nulle par κ est aussi un borélien de mesure nulle, car on a prouvé indépendamment que $m(\kappa(A)) \leq \int_A |\det \kappa'(x)| dx$, la formule de changement de variables ci-dessus est vraie pour f dans $L^1(V)$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.3.4.

En appliquant cette proposition à $|f|, (\operatorname{Re} f)_\pm, (\operatorname{Im} f)_\pm$ pour $f \in L^1(V)$, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 5.3.5. *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\kappa : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1 et $f \in L^1(V)$. Alors $|\det \kappa'| f \circ \kappa$ appartient à $L^1(U)$ et*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\kappa(x)) \left|\det \kappa'(x)\right| dx.$$

EXEMPLES 5.3.6.

(i) Considérons tout d'abord le passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$. On considère

$$\begin{array}{rccll} \kappa : &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- & = \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_- \\ & (r,\theta) & \mapsto & re^{i\theta} & = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \nu = \kappa^{-1} : & \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- & \longrightarrow &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\\ & z & \mapsto & |z|, \operatorname{Im}(\ln z) \end{array}$$

où pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on définit $\ln z = \oint_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi}$. Notons que le théorème 3.3.3 implique que ln est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, coïncide avec ln sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $\exp(\ln z) = z$ car les deux membres sont holomorphes et coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculons la matrice jacobienne $\mathcal{J}$ de κ et son déterminant jacobien J,

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on a donc

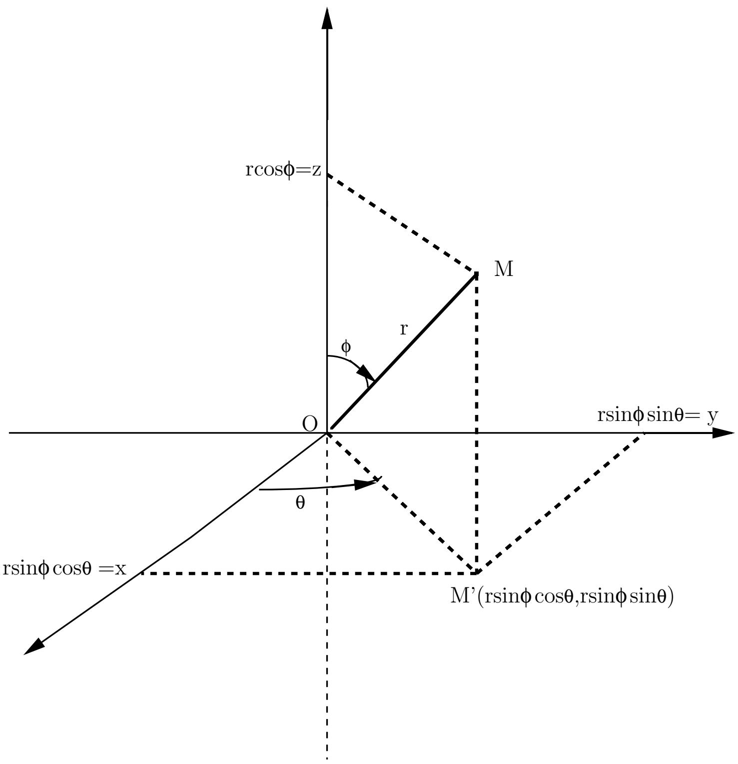
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}_+\times[-\pi,\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta. \tag{5.3.3}$$

(ii) Considérons maintenant le passage en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On considère

$$\begin{array}{rcccccccc} \kappa : &]0,+\infty[& \times &]0,\pi[& \times &]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3\backslash\{(x,y,z), x\le 0, y=0\} \\ & (r & , & \phi & , & \theta) & \mapsto & (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) \end{array}$$

Au lieu de démontrer que κ est un difféomorphisme, examinons, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_{\substack{z\in\mathbb{R}, \rho>0 \\ |\theta|<\pi}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho dz d\rho d\theta \\ &= \iiint_{\substack{r>0, |\theta|<\pi, \\ 0<\phi<\pi}} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r\sin\phi r dr d\phi d\theta \\ &= \iiint_{\substack{r>0, |\theta|<\pi, \\ 0<\phi<\pi}} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta, \end{aligned}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES: $r > 0, |\theta| < \pi, 0 < \phi < \pi$

où la première égalité vient d'un passage en coordonnées polaires dans le plan (x, y) et la deuxième égalité vient d'un passage en coordonnées polaires dans le demi-plan (z, ρ).

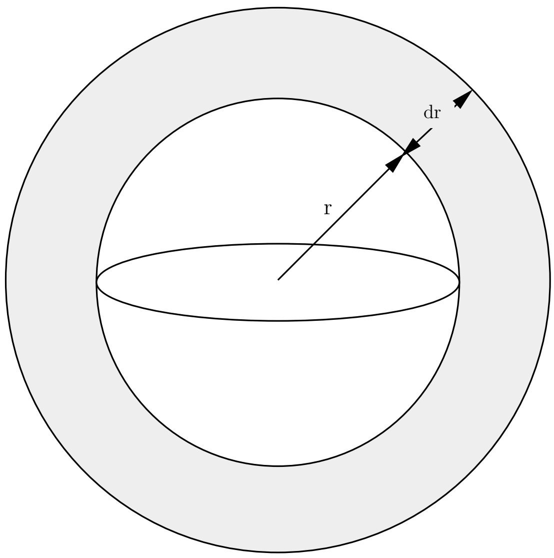
On pourra consulter les exercices pour des calculs en coordonnées sphériques en toute dimension. Donnons ici simplement l'expression de la mesure de Lebesgue de $B_d(R)$, la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^d$

$$m_d\big(B_d(R)\big) = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} R^d \tag{5.3.4}$$

où la fonction Γ est donnée par (3.3.11). L'"aire" $d-1$ dimensionnelle de $S^{d-1}(R)$, la sphère de rayon R de $\mathbb{R}^d$, est

$$|S^{d-1}(R)| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} R^{d-1}. \tag{5.3.5}$$

On peut vérifier les formules ci-dessus en rappelant que $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, pour $x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour $n \geq 1$ entier, $\Gamma(n+1) = n!$. Le lecteur aura remarqué que (5.3.5) est la dérivée de (5.3.4) comme le suggère le dessin suivant.



Si $V(r)$ est le volume de la boule de rayon r et $S(r)$ sa surface, le volume grisé est $V(r+dr)-V(r) \sim S(r)dr$ i.e. $V'(r)=S(r)$.