# 6. CONVOLUTION

## 6.1. Algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$

Soient $u, v \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'application $y \mapsto u(x-y)v(y)$ est continue à support compact $\subset \operatorname{supp} v$. On peut donc considérer

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy. \tag{6.1.1}$$

On dira que $u * v$ est le produit de convolution de $u$ et $v$. Pour $x$ fixé, le changement de variables $y' = x - y$ montre que $u * v = v * u$. Le théorème 3.3.1 implique immédiatement que $u * v$ est continue et par ailleurs, si $x \notin \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$, alors, pour tout $y \in \operatorname{supp} v$, $x - y \notin \operatorname{supp} u$ (sinon $x = x - y + y \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$) et par conséquent, pour tout $y \in \mathbb{R}^n, u(x-y)v(y) = 0$. Par suite, $(\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v)^c \subset \{u*v = 0\}$ et donc $\{u*v \neq 0\} \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$ et comme $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$ est compact (comme somme de compacts), on a

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{x + y\}_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n}, \tag{6.1.2}$$

et $u * v \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, la convolution est associative, car pour, $u, v, w \in C_c(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\big((u*v)*w\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u*v)(x-y)w(y)dy = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(x-y-z)v(z)w(y)dydz$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(x-z)v(z-y)w(y)dydz = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-z)(v*w)(z)dz = \big(u*(v*w)\big)(x).$$

Proposition 6.1.1. *La loi de composition interne de $C_c(\mathbb{R}^n)$ donnée par $(u, v) \mapsto u*v$ est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition et telle que*

$$\|u * v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.1.3}$$

Démonstration. Seul le dernier point reste à établir. On a, pour $u, v \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\|u*v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy \right| dx \leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |u(x-y)||v(y)|dydx$$
$$= \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)|dy = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

On pourra faire le calcul de $u_0 * u_0$ avec $u_0(x) = \exp -\pi|x|^2$ et constater que $\|u_0 * u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1 = \|u_0\|^2_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, ce qui prouve que l'inégalité (6.1.3) est optimale. □

PROPOSITION 6.1.2. *Soit* $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ *et* $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *(i.e.* $\forall K$ *compact,* $u\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$*). On pose*

$$(\varphi * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)u(y)dy. \tag{6.1.4}$$

*La fonction* $\varphi * u$ *appartient à* $C^k(\mathbb{R}^n)$ *et, si* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi * u$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *et vérifie* $\|\varphi * u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. *De plus, en utilisant la définition* (2.1.1)$'$ *du support, on a* $\operatorname{supp}(\varphi * u) \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} u$.

DÉMONSTRATION. Pour $x$ fixé, le support de la fonction $y \mapsto u(y)\varphi(x-y)$ est inclus dans $x - \operatorname{supp}\varphi = \{x-z\}_{z\in\operatorname{supp}\varphi}$ qui est compact, car $\operatorname{supp}\varphi$ est compact. Comme $\varphi$ est bornée, la fonction $y \mapsto u(y)\varphi(x-y)$ est dans $L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne un sens à (6.1.4) et le théorème 3.3.2 montre que $\varphi * u$ appartient à $C^k(\mathbb{R}^n)$. En effet, on a

$$|\varphi^{(k)}(x-y)u(y)| \le |u(y)|\mathbf{1}_{\operatorname{supp}\varphi}(x-y)\sup|\varphi^{(k)}|$$

et par conséquent, pour $K$ compact, comme $K - \operatorname{supp}\varphi = \{x-z\}_{x\in K, z\in\operatorname{supp}\varphi}$ est compact, on a

$$\sup_{x\in K}|\varphi^{(k)}(x-y)u(y)| \le |u(y)|\mathbf{1}_{K-\operatorname{supp}\varphi}(y)\sup|\varphi^{(k)}| \in L^1(\mathbb{R}^n_y).$$

Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, l'inégalité sur les normes $L^1$ se démontre comme (6.1.3).

Terminons avec l'inclusion des supports. Comme $\operatorname{supp}\varphi$ est compact et $\operatorname{supp} u$ est fermé, l'ensemble $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$ est fermé : si $\lim_k(y_k + z_k) = x$, avec $y_k \in \operatorname{supp} u, z_k \in \operatorname{supp}\varphi$, en extrayant une sous-suite, on obtient $\lim_l z_{k_l} = z \in \operatorname{supp}\varphi$ et $\lim_l(y_{k_l} + z_{k_l}) = x$, ce qui implique que la suite $y_{k_l}$ converge et, comme $\operatorname{supp} u$ est fermé $\operatorname{supp} u \ni \lim_l y_{k_l} = x - z$, ce qui démontre que $x \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$.

Considérons l'ouvert $V_0 = (\operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi)^c$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$V_0 - y \subset (\operatorname{supp}\varphi)^c \text{ ou bien } y \notin \operatorname{supp} u. \tag{6.1.5}$$

Sinon, on pourrait trouver $y_0$ tel que $V_0 - y_0 \cap (\operatorname{supp}\varphi) \neq \emptyset$ et $y_0 \in \operatorname{supp} u$. Ceci impliquerait l'existence de $x \in V_0$ tel que $x - y_0 \in \operatorname{supp}\varphi$ et donc

$$V_0 \ni x = x - y_0 + y_0 \in \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} u = V_0^c$$

ce qui est impossible. Par suite, (6.1.5) implique que, pour $x \in V_0$, et $y \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(x-y) = 0$ ou bien $y \notin \operatorname{supp} u$. Comme le domaine d'intégration dans (6.1.4) est $\operatorname{supp} u$, cela implique $(\varphi * u)(x) = 0$ et $(\operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi)^c \subset \big(\operatorname{supp}(\varphi * u)\big)^c$, ce qui est le résultat cherché. $\square$

LEMME 6.1.3. *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $V$ un ouvert $\subset \Omega$. Alors*

$$u_{|_V} = 0 \Longleftrightarrow \forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}(V), \int u(x)\varphi(x)dx = 0$$

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $K$ un compact inclus dans $V$ et $\chi_K \in C_{\mathrm{c}}(V;[0,1])$, $\chi_K = 1$ sur $K$. On trouve que, avec

$$\rho \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d), \int \rho(x)dx = 1, \ \mathrm{supp}\,\rho = \{\|x\| \le 1\}, \, \epsilon > 0, \ \rho_\epsilon(\cdot) = \rho(\cdot/\epsilon)\epsilon^{-d},$$

$$(\rho_\epsilon * \chi_K u)(x) = \int u(y) \overbrace{\chi_K(y)\rho_\epsilon(x-y)}^{\in C_{\mathrm{c}}(V)} dy = 0.$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \|\chi_K u\|_{L^1} &\le \|\chi_K u - \varphi\|_{L^1} + \|\varphi - \varphi * \rho_\epsilon\|_{L^1} + \|\varphi * \rho_\epsilon - \chi_K u * \rho_\epsilon\|_{L^1} \\ &\le 2\,\|\chi_K u - \varphi\|_{L^1} + \|\varphi - \varphi * \rho_\epsilon\|_{L^1}. \end{aligned}$$

LEMME 6.1.4. *Si $\varphi \in C^k_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi * \rho_\epsilon \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi * \rho_\epsilon \to \varphi$ dans $C^k_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ quand $\epsilon$ tend vers* 0.

On a en effet $(\varphi * \rho_\epsilon)(x) = \int \varphi(x - \epsilon y)\rho(y)dy$ et par conséquent

$$|(\varphi * \rho_\epsilon)(x) - \varphi(x)| \le \int \rho(y)|\varphi(x-\epsilon y) - \varphi(x)|dy \le \sup_{|x_1 - x_2| \le \epsilon} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$$

qui tend vers 0 lorsque $\epsilon$ tend vers 0. Comme on a des estimations analogues pour les dérivées d'ordre $\le k$, et que $\mathrm{supp}\,(\varphi * \rho_\epsilon) \subset \mathrm{supp}\,\varphi + \epsilon B_1 \subset \mathrm{supp}\,\varphi + \epsilon_0 B_1$ pour $\epsilon \le \epsilon_0$, on obtient le lemme. Terminons la preuve du lemme 6.1.3. Il vient

$$\|\chi_K u\|_{L^1} \le 2 \inf_{\varphi \in C_{\mathrm{c}}(V)} \|\chi_K u - \varphi\|_{L^1} = 0$$

car $\chi_K u \in L^1(V)$. Ceci donne donc $\chi_K u = 0$ pour tout compact $K \subset V$, d'où, comme $\chi_K = 1$ sur $K$, et que $V$ est réunion dénombrable de compacts, on trouve que $u = 0$ (presque partout) sur $V$.

PROPOSITION 6.1.5. *Il existe une unique application bilinéaire (on note $L^1 = L^1(\mathbb{R}^d)$)*

$$\begin{array}{ccc} L^1 \times L^1 & \to & L^1 \\ (u,v) & \mapsto & u * v \end{array}$$

*telle que si $u, v \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $u * v$ soit la convolution de $u$ et $v$ et*

$$\|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1} .$$

*L'espace $L^1$ est une algèbre de Banach commutative pour l'addition et la convolution.*

PREUVE. L'unicité provient du fait que si $\star$ est une autre application jouissant des mêmes propriétés, $u, v \in L^1$, $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{gathered} u \star v - u * v = \\ (u-\varphi) \star v + \varphi \star (v - \psi) + \varphi \star \psi - (u - \varphi) * v - \varphi * (v - \psi) - \varphi * \psi, \end{gathered}$$

on a en utilisant $\varphi * \psi = \varphi \star \psi$, avec des normes $L^1$,

$$\|u \star v - u * v\|_{L^1} \leq 2 \|u - \varphi\| \, \|v\| \, + 2 \|v - \psi\| \, \|\varphi\| .$$

La densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1$ et l'inégalité ci-dessus impliquent que $u * v = u \star v$. Pour l'existence, on considère des suites $\varphi_k, \psi_k$ qui convergent dans $L^1$ et on montre facilement que $\varphi_k * \psi_k$ est de Cauchy car

$$\|\varphi_{k+l} * \psi_{k+l} - \varphi_k * \psi_k\| \, \leq \|\varphi_{k+l} - \varphi_k\| \, \|\psi_{k+l}\| \, + \|\psi_{k+l} - \psi_k\| \, \|\varphi_k\|$$

En outre, on voit en utilisant la même inégalité que cette limite ne dépend pas du choix des suites $\varphi_k, \psi_\kappa$ mais seulement de leurs limites.

PROPOSITION 6.1.6. *Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour presque tout $x$*

$$\int |u(x-y)v(y)| dy \; < \infty.$$

*Posant $h(x) = \int u(x-y)v(y)dy$, $h \in L^1$ et $\|h\| \, L^1 \leq \|u\| \, L^1 \, \|v\| \, L^1$. En outre $h = u * v$.*

PREUVE. Considérons la fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{2d}$, $F(x,y) = u(x-y)v(y)$. On a

$$\int \left( \int |F(x,y)| dx \right) dy = \int \left( \int |u(x-y)| dx \right) |v(y)| dy = \|u\| \, L^1 \, \|v\| \, L^1 < \infty.$$

Par suite, $F \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$ et le théorème de Fubini implique que

$$h(x) = \int F(x,y) dy$$

existe presque partout en $x$. On a aussi prouvé que $\|h\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$. Comme pour $u, v \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a $h = u * v$, la proposition 6.1.5 permet de conclure.

## 6.2. Estimations $L^p$ pour la convolution

THÉORÈME 6.2.1. INÉGALITÉ DE YOUNG. *Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que*

$$1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q}.$$

*Alors, pour $u, v \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, $\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$.*

PREUVE. Remarquons tout d'abord que si $r = 1$, alors $p = q = 1$ et l'inégalité est déjà prouvée. En outre si $r = +\infty$, alors $1/p + 1/q = 1$ et l'inégalité demandée

$$\|u * v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$

est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder, déjà démontrée. On peut donc supposer que $r \in ]1, +\infty[$. En outre si $p = +\infty$, on a $1 + 1/r = 1/q$, d'où $r = +\infty$, cas maintenant exclu. Si $p = 1$ on a $q = r$ ; si $q = r = 1$, l'inégalité est prouvée. On peut donc supposer que $1 \le p < +\infty$, $1 < q, r < +\infty$. Soit $w \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Considérons

$$(u * v * w)(0) = \int (u * v)(y) w(-y) dy = \iint u(y - x) v(x) w(-y) dy dx.$$

Posons

$$t = \frac{1}{p},\ s = \frac{1}{q},\ \sigma = 1 - \frac{1}{r},\ u_0 = |u|^p, v_0 = |v|^q, w_0 = |w|^{1/\sigma}.$$

Il vient

$$|(u * v * w)(0)| \le \iint u_0^t(y - x) v_0^s(x) w_0^\sigma(-y) dy dx.$$

On remarque que $1 - t + 1 - s = \sigma$, i.e. $1 - t + 1 - s + 1 - \sigma = 1$. On note que

$$t \operatorname{Log} u_0(y - x) + s \operatorname{Log} v_0(x) + \sigma \operatorname{Log} w_0(-y) =$$
$$\left[ (1-t) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_1} + (1-s) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_2} + (1-\sigma) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_3} \right] \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{Log} u_0(y - x) \\ \operatorname{Log} v_0(x) \\ \operatorname{Log} w_0(-y) \end{pmatrix}}_{L}.$$

Par conséquent on a

$$u_0^t(y - x) v_0^s(x) w_0^\sigma(-y) = \exp\big[(1 - t)(a_1 \cdot L) + (1 - s)(a_2 \cdot L) + (1 - \sigma)(a_3 \cdot L)\big] \le$$
$$(1 - t) \exp(a_1 \cdot L) + (1 - s) \exp(a_2 \cdot L) + (1 - \sigma) \exp(a_3 \cdot L),$$

ce qui donne

$$|(u * v * w)(0)| \leq$$
$$\iint [(1-t)v_0(x)w_0(-y) + (1-s)u_0(y-x)w_0(-y) + (1-\sigma)u_0(y-x)v_0(x)]dydx.$$

On obtient donc, avec $1/r + 1/r' = 1, \check{w}(x) = w(-x)$, $\langle u, v\rangle = \int u\bar{w}$,

$$|\langle u * v, \check{w}\rangle| \leq (1-t)\left\|v\right\|_{L^q}^q \left\|w\right\|_{L^{r'}}^{r'} + (1-s)\left\|u\right\|_{L^p}^p \left\|w\right\|_{L^{r'}}^{r'} + (1-\sigma)\left\|u\right\|_{L^p}^q \left\|v\right\|_{L^q}^q.$$

Supposons $\left\|u\right\|_{L^p} = \left\|v\right\|_{L^q} = \left\|w\right\|_{L^{r'}} = 1$. On a alors $|\langle u * v, \check{w}\rangle| \leq 1$ et par homogénéité, on en déduit immédiatement

$$|\langle u * v, w\rangle| \leq \left\|u\right\|_{L^p} \left\|v\right\|_{L^q} \left\|w\right\|_{L^{r'}}.$$

Lemme 6.2.2. *Soit* $1 \leq r \leq \infty, 1/r + 1/r' = 1$. *On rappelle que pour* $u \in L^r, w \in L^{r'}$, *le produit* $uw$ *appartient à* $L^1$. *En outre,*

$$\left\|u\right\|_{L^r} = \sup_{\left\|w\right\|_{L^{r'}}=1} |\langle u, w\rangle|.$$

Nous n'utiliserons et démontrerons ce lemme que dans le cas $1 < r < \infty$. L'inégalité de Hölder permet de démontrer que la norme est supérieure au sup. En outre en prenant $w = \alpha|u|^{r-1}$, avec $u = \alpha|u|$, $|\alpha| \equiv 1$ (on prend $\alpha = u/|u|$ sur $\{u \neq 0\}$, $\alpha = 1$ sur $\{u = 0\}$: on vérifie facilement la mesurabilité de $\alpha$), on trouve

$$\left\|w\right\|_{L^{r'}}^{r'} = \int |u|^{(r-1)r'=r} = \left\|u\right\|_{L^r}^r$$

et

$$\int u\bar{w} = \int u\bar{\alpha}|u|^{r-1} = \int |u|\alpha\bar{\alpha}|u|^{r-1} = \left\|u\right\|_{L^r}^r.$$

Par suite on obtient

$$\langle u, w/\left\|w\right\|_{L^{r'}}\rangle = \left\|u\right\|_{L^r}^{r-\frac{r}{r'}=r(1-\frac{1}{r'})=1}$$

ce qui constitue le résultat du lemme 6.2.2. Par conséquent, l'inégalité précédant le lemme donne, puisqu'on a supposé $1 < r < \infty$, que

$$\left\|u * v\right\|_{L^r} \leq \left\|u\right\|_{L^p} \left\|v\right\|_{L^q}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 6.2.1.

On en déduit que pour $p, q \in [1, \infty[$ et $r$ vérifiant les hypothèses de 6.2.1

$$\begin{array}{ccc} L^p \times L^q & \to & L^r \\ (u,v) & \mapsto & u \star v \end{array}$$

par densité des fonctions $C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d), L^q(\mathbb{R}^d)$. En outre si $p = \infty$, alors $q = 1, r = \infty$ et on voit directement

$$|\int u(x-y)v(y)dy| \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1} ,$$

ce qui donne dans tous les cas vérifiant les hypothèses de 6.2.1

$$p, q, r \in [1, +\infty] \text{ tels que } 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q}, \text{ l'inclusion } L^p * L^q \subset L^r.$$

# Liste de questions sur le cours d'intégration

## Chapitre 1 : Théorie générale de l'intégration

Tribu, application mesurable, tribu engendrée, tribu image.

Tribu des boréliens sur un espace topologique. La continuité implique la mesurabilité.

Mesurabilité des limites simples.

Approximations des fonctions mesurables par les fonctions étagées.

Notion de mesure positive, propriétés de monotonie. Mesure avec densité.

Théorème de Beppo Levi, lemme de Fatou, théorème de convergence dominée de Lebesgue.

## Chapitre 2 : Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Fonctions continues à support compact.

Enoncé du théorème de représentation de Riesz.

Caractérisation de la mesure de Lebesgue.

## Chapitre 3 : Espaces de fonctions intégrables

Fonctions convexes. Inégalités de Jensen, Hölder, Minkowski.

Espaces $L^p(\mu)$: espace de Hilbert pour p=2, de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Continuité, différentiabilité d'intégrales dépendant d'un paramètre.

Densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$.

## Chapitre 4 : Intégration sur un produit cartésien

Produit tensoriel d'espaces mesurés.

Théorèmes de Fubini-Tonelli.

## Chapitre 5 : Difféomorphismes d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ et intégration

Changement de variables linéaire, affine.

Notion de difféomorphisme de classe $C^1$. Matrice jacobienne, déterminant jacobien.

Formule générale du changement de variables.

Coordonnées polaires, sphériques, intégration sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

## Chapitre 6 :Convolution

Convolution de fonctions $C_c(\mathbb{R}^d)$. Support d'une convolution.

Support d'une fonction localement intégrable.

Algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Inégalité de Young.