Exercices pour le cours

de Licence de Mathématiques

Intégration 1

INTEGRATION, Feuille d'exercices 1

Exercice 1.1.
Soit $f : X \to Y$ une application.
a. Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y,

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

b. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X, $\quad f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
c. Montrer que si f est injective, $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Montrer par un contre-exemple que l'égalité précédente est fausse en général.

Exercice 1.2.
Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(X)$. On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour $f : X \to \mathcal{P}(X)$ l'ensemble $A = \{x \in X, x \notin f(x)\}$.

Exercice 1.3.
Soit X un ensemble. On appelle partition de X toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides de X, deux à deux disjointes, de réunion X. Etant donnée une partition de X, montrer que la relation $x\mathcal{R}y$ définie par il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ est une relation d'équivalence sur X. Montrer que toute relation d'équivalence sur X peut s'obtenir de cette manière. Décrire les partitions de $\mathbb{Z}$ associées aux congruences modulo n.

Exercice 1.4.
Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Montrer que A est équipotent à $\mathbb{N}$. Montrer qu'un ensemble X est dénombrable s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$.

Exercice 1.5.
Soit $a \leq b$ des réels et $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que pour tout x de $[a,b]$, la suite $f_n(x)$ tend vers 0 en décroissant. Montrer que la suite f_n converge uniformément vers 0 (lemme de Dini). Montrer que si g_n est une suite de fonctions continues positives sur $[a,b]$ qui tend simplement en croissant vers une fonction continue g, alors $\int_a^b g_n(t)dt \to \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 1.6.
On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues définies sur [0,1] à valeurs réelles.
a. Montrer que E est complet pour la norme donnée par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

b. Montrer que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ définit une norme sur E. Montrer que cette norme n'est pas équivalente à la précédente. Montrer que E muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Exercice 1.7.
a. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge.
b. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge.
c. Montrer que la série harmonique (terme général $1/n$) diverge. Montrer que la suite donnée par

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \mathrm{Log} n$$

est convergente (Log désigne le logarithme népérien).
d. Montrer que, au sens des intégrales de Riemann impropres, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe.
e. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx = +\infty$.

Exercice 1.8.
Montrer que l'ensemble des nombres réels est équipotent à celui des parties de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser les développements dyadiques). Montrer que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Exercice 1.9.
a. Soit X un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ une partition finie de X. Décrire la tribu engendrée par $A_1, \ldots, A_n$. Quel est son nombre d'éléments ?
b. Soit X un ensemble et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de X. Décrire la tribu engendrée par $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elle est équipotente à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.10.
Soit X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu dénombrable sur X.
a. Montrer que pour tout $x \in X$, l'intersection $A(x)$ des éléments de $\mathcal{M}$ qui contiennent x est encore élément de $\mathcal{M}$.
b. Montrer que pour $x, x' \in X$, soit $A(x) \cap A(x') = \emptyset$, soit $A(x) = A(x')$.
c. Montrer que $\mathcal{M}$ est la tribu engendrée par une partition dénombrable. En déduire en utilisant l'exercice précédent que $\mathcal{M}$ est finie.

Exercice 1.11.
Montrer que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles du type $[a, +\infty[$. Même question avec les intervalles du type $]a, +\infty[$. Même question avec les intervalles du type $]-\infty, a]$ et ceux du type $]-\infty, a[$.

Exercice 1.12.
Soit $(a_{ij})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ une suite double d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer directement que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}\Big).$$

Exercice 1.13.
Donner un exemple d'une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout n, A_n est infini et $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n = \emptyset$.

Exercice 1.14.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$(a_n, b_n), (\limsup a_n, \limsup b_n) \notin \{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\}.$$

Montrer que $\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$. Donner un exemple de suites bornées pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte. Ecrire un énoncé analogue pour les $\liminf$.

Exercice 1.15.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in X, \text{ la suite } \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est élément de $\mathcal{M}$.

Problème 1.1. Théorème de Schröder-Bernstein.
Soit $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ des applications injectives. On pose

$$A_0 = X\backslash g(Y), \qquad \text{et pour } n \ge 0, \qquad A_{n+1} = g\big(f(A_n)\big).$$

Soit $x \in X$. Si x est élément de $\bigcup_{n\ge 0} A_n$, on pose $h(x) = f(x)$; sinon on pose $h(x) = g^{-1}(x)$. Montrer que cette définition de h est cohérente et définit une bijection de X sur Y.

Problème 1.2. Théorème de Baire.
a. Soit X un espace métrique complet (i.e. tel que toute suite de Cauchy converge). Montrer qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

b. En déduire que les irrationnels ne forment pas un F_σ dans $\mathbb{R}$.
c. On dit qu'un espace topologique est de première catégorie s'il est réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides. Sinon on dit qu'il est de seconde catégorie. De quelle catégorie est un espace métrique complet ?

Problème 1.3.
a. En considérant des fonctions indicatrices à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, montrer que

$$\mathbf{1}_{A\triangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B,$$

où $\triangle$ désigne la différence symétrique.
b. Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une famille non vide de parties de X. On dit que $\mathcal{R}$ est un anneau booléen si $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B, A\backslash B \in \mathcal{R}$. Montrer qu'un anneau booléen sur un ensemble X est stable par réunion, intersection, différence, différence symétrique et contient l'ensemble vide. Montrer qu'un anneau booléen est un anneau pour la différence symétrique et l'intersection.
c. On dit qu'un anneau booléen $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est une algèbre de Boole sur X si $X \in \mathcal{R}$. Montrer que pour qu'un anneau booléen $\mathcal{R}$ sur X soit une algèbre de Boole sur X, il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ soit stable par passage au complémentaire i.e. $A \in \mathcal{R} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{R}$.
d. Soit X un ensemble. Définir la notion d'anneau booléen (resp. algèbre de Boole) engendré(e) par une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$.
e. Soit X un ensemble et $\mathcal{E}$ une partie non vide dénombrable de $\mathcal{P}(X)$. Montrer que l'anneau $\mathcal{R}$ engendré par $\mathcal{E}$ est dénombrable (montrer que l'on peut supposer que $\mathcal{E}$ contient l'ensemble vide, définir $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E},\ \mathcal{E}_{n+1} = (\mathcal{E}_n)^*$, où $\mathcal{C}^*$ désigne les réunions finies de différences d'éléments de $\mathcal{C}$, puis démontrer que $\mathcal{R} = \cup_n \mathcal{E}_n$).

Problème 1.4. Construction de l'ensemble triadique de Cantor.
On considère l'intervalle $E_0 = [0, 1]$ privé de son tiers médian $]1/3, 2/3[$. On obtient l'ensemble réunion disjointe de deux intervalles $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. On prive chacun de ces deux intervalles de leur tiers médian: on obtient $E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ réunion disjointe de quatre intervalles. On suppose que E_n est réunion de 2^n intervalles disjoints de longueur 3^{-n}. On construit E_{n+1} en privant chacun des intervalles précédents de leur tiers médian; on obtient que $E_{n+1} \subset E_n$ est réunion de 2^{n+1} intervalles disjoints de longueur 3^{-n-1}. L'ensemble triadique C de Cantor est défini par $C = \cap_{n\geq 0} E_n$.
a. Montrer que C est compact, de mesure nulle.
b. Montrer que

$$C = \{x \in [0, 1], x = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{3^k}, x_k \in \{0, 2\}\}.$$

c. Montrer que C est équipotent à $\mathbb{R}$.
d. Montrer que C est totalement discontinu, i.e. tel que la composante connexe de chaque point est réduite à ce point (la composante connexe d'une partie d'un espace topologique est par définition la réunion des connexes qui contiennent cette partie, ce qui est cohérent car une réunion quelconque de connexes qui ont un point en commun est connexe).

INTEGRATION, Feuille d'exercices 2

Exercice 2.1.
Montrer que la fonction suivante est discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue sur $\mathbb{Q}^c$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q, p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*, \text{ fraction irréductible,} \\ 0 & \text{si } x \text{ irrationnel.} \end{cases}$$

Exercice 2.2.
Soit X un borélien de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est mesurable.

Exercice 2.3.
Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ des espaces mesurables et T un espace métrique séparable muni de la tribu des boréliens. Soient $u_1, \ldots, u_d$ des applications mesurables de X dans T et $\Phi : T^d \to Y$ mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \Phi\big(u_1(x), \ldots, u_d(x)\big) \end{array}$$

est mesurable.

Exercice 2.4.
Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable. Montrer qu' il existe une fonction mesurable $\alpha : X \to \mathbb{C}$ avec $|\alpha| \equiv 1$, telle que $f = \alpha|f|$.

Exercice 2.5.
Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_A = \{M \cap A\}_{M \in \mathcal{M}}$ est une tribu sur A, rendant l'injection canonique mesurable. Montrer que si en outre $A \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_A = \{M \in \mathcal{M}, M \subset A\}$.

Exercice 2.6.
Montrer que l'addition des réels se prolonge par continuité à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que la multiplication des réels ne se prolonge pas par continuité à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que si l'on adopte la convention $0 \cdot \infty = 0$ cette nouvelle multiplication est associative, commutative, avec élément neutre 1 et distributive par rapport à l'addition. Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, f et g des fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que $f+g$ est mesurable. Montrer que $f \cdot g$ défini en adoptant la convention $0 \cdot \infty$ est mesurable.

Exercice 2.7.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}$. Montrer que $\mu(\cup_{\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Montrer que

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

et généraliser cette formule aux cas faisant intervenir un nombre fini d'ensembles

$$A_1, \ldots, A_n.$$

Exercice 2.8.
Soit X un ensemble et μ la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $\mu(A) = \mathrm{Card}A$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ est un espace mesuré.

Exercice 2.9.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{M}$. Montrer que $\sum_{k\geq 0} \mu_k$ définit une mesure positive sur $\mathcal{M}$.

Exercice 2.10.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Exercice 2.11.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{M}$. On suppose que pour tout $A \in \mathcal{M}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$. Pour $A \in \mathcal{M}$, on pose

$$\mu(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_j(A).$$

a. Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$.
b. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et pour $j \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$, on définit $\nu_j(A) = \mathrm{Card}(A \cap [j, +\infty[)$(Card$E$ désigne le nombre d'éléments de E si E est fini, $+\infty$ sinon). Montrer que ν_j est une mesure positive définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$. On pose

$$\nu(A) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A).$$

Montrer que $\nu(\mathbb{N}) = +\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu(\{k\}) = 0$. En déduire que ν n'est pas une mesure sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2.12.
Soit $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure positive définie sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu(K) < +\infty$ pour K compact (*on dira que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$*). Soit

$$D = \{a \in \mathbb{R}, \mu(\{a\}) > 0\}.$$

a. Soient n, l des entiers ≥ 1. On pose $D_{n,l} = \{a \in \mathbb{R}, |a| \leq n \text{ et } \mu(\{a\}) \geq 1/l\}$. Montrer que $D_{n,l}$ est fini. Montrer que D est dénombrable.
b. On pose pour $E \in \mathcal{B}$, $\lambda(E) = \mu(D \cap E)$. Montrer que cela a un sens et que λ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda = \sum_{a \in D} \mu(\{a\}) \delta_a,$$

où δ_a est la masse de Dirac en a (i.e. $\delta_a(E) = \mathbf{1}_E(a)$).
c. Montrer que $\mu = \lambda + \nu$ où ν est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu(\{x\}) = 0$.

Exercice 2.13.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables

$$A = \{x \in X, \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = +\infty\}, \qquad B = \{x \in X, \text{ la suite } (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Exercice 2.14.
Soient X, Y deux espaces métriques et soit $f : X \to Y$, une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable (X, Y sont munis de leur tribu borélienne).

Exercice 2.15.
Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ où $x \in X$.
a. Montrer que $A \in \mathcal{M}$ si et seulement si A est dénombrable ou bien A^c est dénombrable.
b. Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= 0, \quad \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ \mu(A) &= 1, \quad \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$.

Exercice 2.16.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des applications mesurables. Montrer que les ensembles suivants appartiennent à $\mathcal{M}$.

$$A = \{x \in X, f(x) \leq g(x)\}, \qquad B = \{x \in X, f(x) < g(x)\}, \qquad C = \{x \in X, f(x) = g(x)\}.$$

Exercice 2.17.
Un exercice de révision non nécessairement superflu. Les amateurs de formules pourront consulter le site

http://integrals.wolfram.com/

en respectant scrupuleusement la typographie un peu étrange donnée dans

http://integrals.wolfram.com/about/input/

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de définition.

$\tan x$	$\cot x$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{1}{\sin x}$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\sin^2 x$
$\sin^3 x$	$\cos^2 x$	$\cos^3 x$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
$\coth x$	$\dfrac{1}{\cosh x}$	$\dfrac{1}{\sinh x}$	$\cosh^2 x$
$\mathrm{argsinh} x$	$\mathrm{argcosh} x$	$\mathrm{argtanh} x$	$\mathrm{argcoth} x$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\dfrac{x}{1-x^2}$	$\dfrac{x}{x^2+1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Problème 2.1.
Pour deux ensembles X, Y, on dira que $\mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y$ s'il existe une bijection de X sur Y, et $\mathrm{Card}\, X \leq \mathrm{Card}\, Y$ s'il existe une injection de X dans Y.
a. Montrer en utilisant le problème 1.1 que, pour des ensembles X, Y

$$\{\mathrm{Card}\, X \leq \mathrm{Card}\, Y \text{ et } \mathrm{Card}\, Y \leq \mathrm{Card}\, X\} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y.$$

b. Soit d un entier ≥ 1. Montrer que $\mathrm{Card}\,\mathbb{R}^d = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}$. *On pourra construire une injection de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *en utilisant les développements décimaux des nombres réels de l'intervalle* $]0,1[$ *et en considérant l'"application"*

$$(0, x_1 x_2 \dots x_k \dots \quad , \quad 0, y_1 y_2 \dots y_k \dots) \mapsto 0, x_1 y_1 \dots x_k y_k \dots$$

On montrera en particulier que cette application peut être bien définie.

Problème 2.2.
a. Soit X un ensemble, $n \geq 1$ un entier, et $\mathcal{F} = \{A_j\}_{1 \leq j \leq n}$ une partition de X. Décrire la tribu $\mathcal{M}$ engendrée par $\mathcal{F}$. Déterminer $\mathrm{Card}\,\mathcal{M}$.
b. Soit X un ensemble, et $\mathcal{F} = \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une partition de X. Décrire la tribu $\mathcal{M}$ engendrée par $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathrm{Card}\,\mathcal{M} = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}$.
c. Soit $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Card}\,\mathcal{B} = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas boréliennes. Soit d un entier ≥ 1 et $\mathcal{B}_d$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\mathrm{Card}\,\mathcal{B}_d = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe des parties de $\mathbb{R}^d$ qui ne sont pas boréliennes.
d. Montrer qu'il existe des parties de l'ensemble de Cantor C (cf.problème 1.4) qui ne sont pas boréliennes.

INTEGRATION, Feuille d'exercices 3

Exercice 3.1.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*\big(f_*(\mu)\big).$$

Exercice 3.2.
On note $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et on considère une mesure positive μ définie sur $\mathcal{B}$ et finie sur les compacts. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a, t[) & \text{si } t > a, \\ -\mu([t, a[) & \text{si } t \leq a. \end{cases}$$

Montrer que F_a est croissante et continue à gauche.

Exercice 3.3.
Déterminer l'ensemble des réels α, β, γ tels que

$$\frac{t^\alpha e^{-t}}{(1 + t^{1/2})} \in L^1(\mathbb{R}_+), \qquad \frac{\sin t}{t^\beta e^t} \in L^1(\mathbb{R}_+), \qquad \frac{\ln |t|}{|t|^\gamma} \in L^1([-1, 1]).$$

Exercice 3.4.
a. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n dx$.
b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{z-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = \Gamma(z).$$

Exercice 3.5.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable telle que $\int_X f d\mu < +\infty$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\mu(A) < \alpha \quad \text{implique} \quad \int_A f d\mu < \epsilon.$$

Exercice 3.6.
Soit m la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Construire un ouvert Ω dense dans $\mathbb{R}$ tel que $m(\Omega) < \epsilon$.

Exercice 3.7.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $\Phi : X \longrightarrow Y$ une application. En considérant la tribu image, la mesure image $\Phi_*(\mu)$ et une application mesurable $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que

$$\int_X (g \circ \Phi) d\mu = \int_Y g d(\Phi_*(\mu))$$

Exercice 3.8.
Donner un exemple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ convergeant simplement vers 0 telle que

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to +\infty.$$

Exercice 3.9.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. on dit que f est *essentiellement majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\mu(\{x \in X, f(x) > M\}) = 0.$$

On pose alors

$$\text{essup} f = \inf\Big\{M \in \mathbb{R}_+, \mu(\{x \in X, f(x) > M\}) = 0\Big\}.$$

a. Montrer qu'une fonction majorée par un réel M est essentiellement majorée. Donner un exemple de fonction essentiellement majorée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui ne soit pas majorée.
b. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction essentiellement majorée. Montrer que

$$0 \leq f \leq \text{essup} f, \quad \mu - \text{presque partout}.$$

c. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ des fonctions mesurables essentiellement majorées. Montrer que $f + g$ est essentiellement majorée et que

$$\text{essup}(f + g) \leq \text{essup} f + \text{essup} g.$$

Exercice 3.10.
Soit X un ensemble. On appelle mesure extérieure sur X une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

$\mu(\emptyset) = 0$,
$A \subset B \subset X$ implique $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),
$\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ (sous-additivité dénombrable).

Montrer que μ^* définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$\mu^*(A) = \inf \{\sum_{j\in\mathbb{N}} (b_j - a_j)\}$$

où $\cup_{j\in\mathbb{N}}]a_j, b_j[$ parcourt les recouvrements ouverts de A, est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.11.
Trouver une suite de fonctions continues $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$ et telle que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pour aucun $x \in [0,1]$.

Exercice 3.12.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que cette suite est croissante et que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < +\infty$. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est fini $\mu - pp$. Donner un énoncé analogue pour les séries de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Exercice 3.13.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$. On suppose que, pour tout $E \in \mathcal{M}$, $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que f est nulle $\mu - pp$.

Exercice 3.14.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable.
a. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0.$$

La réciproque est-elle vraie ?
b. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 3.15.
Déterminer la limite des suites

$$u_n = \sum_{k\geq 1} \frac{n}{nk^2+k+1}, \qquad v_n = \sum_{1\leq k\leq 2n} \frac{n^2}{kn^2+k^2}, \qquad w_n = \sum_{1\leq k\leq n^2} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n.$$

Exercice 3.16.
Déterminer la limite des suites $\displaystyle\int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\tanh(\frac{x}{n})dx, \qquad \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx.$

Problème 3.1. Un ensemble non mesurable.
On considère sur [0,1] la relation d'équivalence $\sim$ définie par $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. On rappelle l'énoncé de l'axiome du choix. Soit I un ensemble non vide et soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Alors

$$\forall i \in I, X_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset.$$

Si $X \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on notera $X + t$ l'ensemble $\{x + t\}_{x\in X}$.
a. En utilisant l'axiome du choix, montrer qu'il existe une partie A de [0,1] formée en prenant dans chacune des classes d'équivalence de $\sim$ un élément et un seul.
b. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ une bijection. On pose $A_n = A + \varphi(n)$. Montrer que

$$[0, 1] \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset [-1, 2]$$

c. En déduire qu'il n'existe pas de mesure positive μ définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation, (i.e. telle que $\mu(X) = \mu(X + t)$ pour toute partie X de $\mathbb{R}$ et tout réel t), et telle que $\mu([a, b]) = b - a$ pour $a \leq b$.

Problème 3.2. Théorème d'Egoroff.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction f.
a. On définit pour $k \geq 1, n$ entiers, l'ensemble

$$E_n^k = \cap_{p\geq n}\{x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq 1/k\}.$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k$.
b. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie mesurable A_ϵ telle que $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$ et telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $X \backslash A_\epsilon$.
c. Montrer que l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ n'est pas superflue.

INTEGRATION, Feuille d'exercices 4

Exercice 4.1.
a. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si les séries normalement convergentes sont convergentes (une série de terme général u_n est dite normalement convergente si $\sum \|u_n\| < +\infty$).
b. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $\sum u_n$ une série normalement convergente dans $L^1(\mu)$. Montrer que $\sum u_n(x)$ est convergente $\mu - pp$.
c. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(\mu)$ telle que $\sum_{n\geq 1} \|f_{n+1} - f_n\|_{L^1(\mu)} < +\infty$. Montrer que la suite f_n converge dans $L^1(\mu)$ et $\mu - pp$. Comparer avec l'exercice 3.8.

Exercice 4.2.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est $\sigma-$fini s'il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que, pour tout n, $\mu(X_n) < +\infty$ et $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Montrer que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est $\sigma-$fini si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) > 0$.

Exercice 4.3.
a. Calculer la limite de la suite $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ pour $n \to +\infty$.
b. Soit $x > 0$. Montrer que la suite

$$I_n(x) = \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t}$$

est bien définie pour $n \geq 1$ et converge lorsque $n \to +\infty$. Donner une expression intégrale pour la limite $I(x)$. Quelle fonction classique reconnaissez-vous ?
c. Montrer que pour $x > 0$ et n entier ≥ 1 on a

$$I_n(x) = n^x \frac{n!}{\prod\limits_{0\leq j\leq n} (x+j)} = n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(*on pourra faire le changement de variable $t = ns$ dans $I_n(x)$, raisonner par récurrence sur n, et faire une intégration par parties*).

Exercice 4.4.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que $\mu(\{x \in X, f(x) \neq 0\}) > 0$. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu \qquad \text{et} \qquad J = \{p \in [1, +\infty[, \varphi(p) < +\infty\}.$$

a. Soient $p_0 \leq p_1$ des éléments de J. Pour $\theta \in [0,1]$, montrer que $p_\theta = (1-\theta)p_0 + \theta p_1$ est élément de J (*on pourra utiliser l'inégalité de Hölder*).
b. Montrer que φ est strictement positive sur J et que $\ln \varphi$ est convexe sur J.
c. On suppose qu'il existe $r_0 \in [1, +\infty[$ tel que $f \in L^{r_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$. Montrer que $f \in L^p(\mu)$ pour $p \in [r_0, +\infty]$. Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

d. On suppose qu'il existe $r_0 \in [1, +\infty[$ tel que $f \in L^p(\mu)$ pour $p \in [r_0, +\infty[$. Montrer que si $f \notin L^\infty(\mu)$ on a

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(\mu)} = +\infty.$$

Exercice 4.5.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité. Soient f, g des fonctions mesurables de X à valeurs dans $]0, +\infty[$ telles que, pour tout $x \in X$, $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq 1$.

Exercice 4.6.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X à valeurs réelles. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers f si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

a. Montrer que si f_n tend vers f $\mu - pp$, alors f_n tend vers f en probabilité.
b. Si $p \in [1, +\infty]$ et si $f_n, f \in L^p(\mu)$ sont tels que f_n tende vers f dans $L^p(\mu)$, montrer que f_n tend vers f en probabilité.

Exercice 4.7.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité et $f \in L^\infty(\mu)$ non nulle. On pose $\alpha_n = \|f\|^n_{L^n(\mu)}$. Montrer que α_{n+1}/α_n tend vers $\|f\|_{L^\infty(\mu)}$ (*on pourra utiliser l'exercice 4.4*).

Exercice 4.8.
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^d$. Pour $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$. Montrer que $\|\tau_h u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}$et que

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^p} = 0.$$

Exercice 4.9.
Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty]$ les fonctions suivantes sont-elles dans $L^p(\mathbb{R}_+)$?
$f_1(t) = 1/(1+t)$, $f_2(t) = 1/(\sqrt{t}(1+t))$, $f_3(t) = 1/(\sqrt{t}(\ln t)^2 + 1)$, $f_4(t) = t^{-1/2} \sin(t^{-1})$.

Exercice 4.10.
Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha}{(|x|+n)^\beta}$, avec $\beta > 1$.
a. Pour $1 \le p \le +\infty$, montrer que $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ et calculer $\|f_n\|_p$.
b. Montrer que g_n définie par $g_n(x) = n^\gamma e^{-n|x|}$ est dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \ge 1$.
c. Déduire de ce qui précède que pour $1 \le p < q \le +\infty$ les topologies induites sur $L^p \cap L^q$ par L^p et L^q ne sont pas comparables.

Exercice 4.11.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $p, p' \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/p' = 1$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$ si pour tout $g \in L^{p'}(\mu)$,

$$\lim_n \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

a. Montrer que la convergence dans L^p implique la convergence faible.
b. Montrer à l'aide d'un exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 4.12.
Soit μ une mesure positive définie sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ et telle que $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. On pose $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(t)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si

$$\frac{1}{h^2}\Big(2f(0) - f(h) - f(-h)\Big)$$

possède une limite lorsque h tend vers 0, alors $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu(t) < +\infty$ et f est de classe C^2.

Exercice 4.13.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désigne par J l'intérieur de I. Soit $[a, b] \subset J$ et $a < x_1 < x_2 < b$. Montrer que

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(a)}{x_1 - a}(x_2 - a) + \varphi(a) \le \varphi(x_2) \le \varphi(b) - (b - x_2)\frac{\varphi(b) - \varphi(x_1)}{b - x_1}.$$

En déduire que φ est continue sur J. Donner un exemple de fonction convexe définie sur $[0, 1]$ et continue seulement sur]0,1[.

Exercice 4.14.
a. On pose ($\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^d$)

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp -\left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{pour } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que ρ est indéfiniment différentiable à support égal à la boule unité fermée. Montrer que ρ n'est pas analytique.
b. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K un compact inclus dans Ω. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, [0,1])$ telle que $\varphi_{|K} = 1$.

Problème 4.1
Soit $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure positive définie sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu(K) < +\infty$ pour K compact (*on dira que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$*). Soit

$$D = \{a \in \mathbb{R}, \mu(\{a\}) > 0\}.$$

a. Soient n, l des entiers ≥ 1. On pose $D_{n,l} = \{a \in \mathbb{R}, |a| \leq n \text{ et } \mu(\{a\}) \geq 1/l\}$. Montrer que $D_{n,l}$ est fini. Montrer que D est dénombrable.
b. On pose pour $E \in \mathcal{B}$, $\lambda(E) = \mu(D \cap E)$. Montrer que cela a un sens et que λ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda = \sum_{a \in D} \mu(\{a\}) \delta_a,$$

où δ_a est la masse de Dirac en a (i.e. $\delta_a(E) = \mathbf{1}_E(a)$).
c. Montrer que $\mu = \lambda + \nu$ où ν est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu(\{x\}) = 0$.

Problème 4.2
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f.
a. Soit p un réel ≥ 1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et que la suite $\displaystyle\int_X |f_n|^p d\mu$ converge dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
b. On suppose en outre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p d\mu = \int_X |f|^p d\mu$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

(on pourra considérer les suites $g_n = |f_n - f|^p - |f_n|^p + |f|^p$, $h_n = |g_n| \mathbf{1}_{\{|f_n| \leq \lambda |f|\}}$ où λ est un paramètre positif).

Problème 4.3
Dans cet exercice, L^p désigne l'espace $L^p(\mu)$ pour la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$ et $\|u\|_p$ est la norme L^p de u.
`a.` Soit $f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue à support compact dans $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, on pose

$$(Hf)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Pour $p>1$, montrer que Hf appartient à L^p.
`b.` Pour f vérifiant les hypothèses de `(a)`, et en outre à valeurs positives, montrer

$$\|Hf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p\,. \tag{$\sharp$}$$

On pourra remarquer que $F=Hf$ est aussi une fonction positive et intégrer par parties dans $\int_0^{+\infty} F(x)^p \frac{d}{dx}(x)dx$.
`c.` Pour f vérifiant les hypothèses de `(a)`, montrer $(\sharp)$.
`d.` Montrer que l'application $H: C_c(]0,+\infty[)\longrightarrow L^p$ se prolonge par continuité de manière unique à L^p et vérifie $(\sharp)$ pour tout $f\in L^p$.
`e.` Montrer qu'il n'est pas possible de remplacer la constante $\frac{p}{p-1}$ dans $(\sharp)$ par une constante plus petite. *On pourra considérer la fonction qui vaut $x^{-1/p}$ sur $[1,\lambda]$, zéro ailleurs, et faire tendre λ vers l'infini.*

INTEGRATION, Feuille d'exercices 5

Exercice 5.1.
a. Soit φ une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in [0,1]$ avec $\sum_{1 \le j \le n} \theta_j = 1$. Montrer que

$$\varphi\big(\sum_{1 \le j \le n} \theta_j x_j\big) \le \sum_{1 \le j \le n} \theta_j \varphi(x_j).$$

b. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels > 0 et $\theta_1, \ldots, \theta_n$ comme ci-dessus. Montrer l'inégalité *arithmético-géométrique*

$$\prod_{1 \le j \le n} x_j^{\theta_j} \le \sum_{1 \le j \le n} \theta_j x_j.$$

Exercice 5.2.
Montrer que $l^\infty(\mathbb{N})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$ ne sont pas séparables (*on pourra raisonner par l'absurde*).

Exercice 5.3.
Soient n un entier ≥ 1 et $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit le *support* de u, noté $\operatorname{supp} u$, par

$$\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \text{il n'existe pas de voisinage ouvert } V \text{ de } x \text{ tel que } u = 0 \text{ pp sur } V\}$$

Montrer que le support de u est un fermé et que, si u est continue

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, u(x) \neq 0\}}.$$

Montrer par un exemple que cette dernière définition serait absurde pour une fonction de L^1.

Exercice 5.4. *Les questions a et b ont été vues en cours.*
a. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. On considère

$$S = \{s : X \to \mathbb{C},\ \text{mesurable, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, } \mu(\{s \neq 0\}) < +\infty\}.$$

Montrer que, pour $1 \le p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.
b. Montrer que, pour $1 \le p < +\infty$, $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
c. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $1 \le p < +\infty$, $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
d. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ (cf.exercice 4.14). Pour $\epsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \frac{dy}{\epsilon^n}.$$

Montrer que cela a un sens et que $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
e. Soit $1 \le p < \infty$. Montrer que, pour $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $u_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\lim\limits_{\epsilon \to 0_+} u_\epsilon = u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
f. On remplace ρ dans (d) par $e^{-\pi|x|^2}$ où $|x|$ est la norme euclidienne. Montrer que, pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, u_ϵ est analytique et $\lim\limits_{\epsilon \to 0_+} u_\epsilon = u$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. En supposant $u \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que cette méthode permet de prouver le théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 5.5.
Une conséquence des exercices précédents est que, pour $1 \le p < +\infty$, le complété de $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ pour la norme L^p est l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que le complété de $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ pour la norme L^∞ est $C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Exercice 5.6. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*
Soit u une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$. On pose, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx, \qquad \text{avec} \qquad x \cdot \xi = \sum_{1 \le j \le n} x_j \xi_j.$$

On dira que $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de u.
a. Montrer que, si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u}$ est bien définie et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
b. Montrer que, si $u \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{u}$ est C^∞ et vérifie pour tous les $\alpha_1, \dots, \alpha_n, N$ entiers naturels

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(\partial^{\alpha_1}_{\xi_1} \dots \partial^{\alpha_n}_{\xi_n} \hat{u})(\xi)|(1 + |\xi|)^N < +\infty.$$

On pourra intégrer par parties en remarquant que

$$\Big(1 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big)(e^{-2i\pi x\cdot\xi}) = (1 + |\xi|^2) e^{-2i\pi x\cdot\xi}.$$

c. Montrer que si u appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie $\lim\limits_{|\xi| \to +\infty} \hat{u}(\xi) = 0$. *On pourra remarquer que pour $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$,*

$$|\hat{u}(\xi)| \le \|u - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\hat{\varphi}(\xi)|,$$

puis prendre la limsup lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini.

Exercice 5.7.
Soit $\mathcal{L}$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En considérant un ensemble du type $\{a\} \times B$, où $B \subset \mathbb{R}, B \notin \mathcal{L}$, montrer que la tribu $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ n'est pas complète.

Exercice 5.8.
Pour $t \in \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, on pose $(\tau_t u)(x) = u(x-t)$. Montrer que pour $1 \le p \le +\infty$, $\|\tau_t u\|_{L^p(\mu)} = \|u\|_{L^p(\mu)}$. Montrer que pour $1 \le p < +\infty$, $\lim_{t\to 0} \|\tau_t u - u\|_{L^p(\mu)} = 0$.

Exercice 5.9.
On pose $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}\}$. Montrer que E ne peut contenir aucun ensemble du type $A_1 \times A_2$ avec A_1, A_2 mesurables et de mesure positive. *On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction*

$$\varphi(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_1}(x_1 + x_2)\mathbf{1}_{A_2}(x_2)dx_2,$$

dont on démontrera qu'elle est continue. On considérera alors un point x_1 tel que $\varphi(x_1) > 0$, puis on prouvera que $x_1 \in A_1 - A_2$. On en déduira que $\{\varphi > 0\} \subset \mathbb{Q}^c$, ce qui est absurde pour une fonction continue non identiquement nulle.

Exercice 5.10.
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Calculer pour $j = 1, 2$,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_j(x,y)dy \right) dx, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f_j(x,y)dx \right) dy.$$

Quelles réflexions cela vous inspire-t-il ?

Exercice 5.11.
a. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on pose $\ln z = \displaystyle\int_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi}$ (intégrale curviligne). Montrer que cela a un sens et que cette fonction coïncide avec le logarithme népérien pour $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\exp(\ln z) = z$ pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Calculer $\ln(\exp z)$, pour z tel que $\exp(z) \notin \mathbb{R}_-$.
b. Montrer que pour $\operatorname{Re} z > 0$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z t^2} dt = \exp -(\ln z)/2 = z^{-1/2}$.
c. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 dx = \pi \ln 2.$$

Pour le dernier calcul, on pourra utiliser l'intégrale sur $[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+$ de $(1 + x^2 z^2)^{-1}(1 + y^2 z^2)^{-1}$.

Exercice 5.12.
a. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Montrer que si $\mu(X) < +\infty$, les conditions $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ impliquent $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ avec une injection continue. Montrer que les conditions $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ impliquent $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
b. Montrer que les conditions $1 < q < p < +\infty$ impliquent $l^1(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N}) \subset l^p(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$ avec des injections continues et des inclusions strictes.
c. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux indices distincts. Montrer que $L^p(\mathbb{R}^n)$ n'est pas inclus dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Problème 5.1. Quelques propriétés des fonctions convexes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$.
a. Montrer que φ est convexe si et seulement si pour tout intervalle compact $J \subset I$ et toute fonction affine L,

$$\sup_J (\varphi - L) = \sup_{\partial J} (\varphi - L).$$

b. Montrer que φ est convexe si et seulement si, pour tout $x \in I$, le quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est une fonction croissante de h pour $h \neq 0$ et $x + h \in I$.
c. Si φ est convexe, montrer que la dérivée à gauche $\varphi'_g(x)$ et la dérivée à droite $\varphi'_d(x)$ existent en tout point intérieur à I et sont des fonctions croissantes. Pour $x_1 < x_2$ intérieurs à I, montrer l'inégalité

$$\varphi'_g(x_1) \leq \varphi'_d(x_1) \leq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \varphi'_g(x_2) \leq \varphi'_d(x_2).$$

Montrer que φ est lipschitzienne dans tout intervalle compact inclus dans l'intérieur de I.
d. Si φ est convexe, et x est dans l'intérieur de I, montrer que

$$\varphi'_g(x) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \varphi'_g(x - \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \varphi'_d(x - \epsilon),$$
$$\varphi'_d(x) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \varphi'_d(x + \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \varphi'_g(x + \epsilon).$$

e. On considère une suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels distincts et une suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels > 0 telles que

$$\sum_{j \geq 0} a_j (1 + |x_j|) < +\infty.$$

Montrer que

$$\varphi(x) = \sum_{j\geq 0} a_j |x - x_j|$$

définit une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ est différentiable sur le complémentaire des x_j et que, pour ces points

$$\varphi'(x) = \sum_{j\geq 0} a_j \mathrm{sign}(x - x_j).$$

f. Si φ est continue et telle que, pour tous les points x intérieurs à I;

$$\limsup_{h\to 0} \left(\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} \right) \geq 0,$$

alors φ est convexe.

Problème 5.2. Quelques propriétés de la fonction Gamma.
Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

a. Montrer que Γ est holomorphe sur $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrer que, pour $z \in H$,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

et que pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ et que $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$.
b. Montrer que Γ possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples sur $-\mathbb{N}$. Montrer que le résidu de Γ en $-k$, $k \in \mathbb{N}$ est

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

c. Montrer que pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) > 0,\ \Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

En déduire que $\ln \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
d. Montrer que $\Gamma|_{\mathbb{R}_+^*}$ possède un unique minimum en un point de l'intervalle $]1, 2[$.
e. En utilisant le prolongement défini plus haut, calculer pour k entier négatif

$$\Gamma((2k)_\pm), \quad \Gamma((2k-1)_\pm).$$

Dessiner la courbe représentative de Γ sur $\mathbb{R}$.

f. En calculant pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt,$$

démontrer la formule de Gauss:

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash (-\mathbb{N}), \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^z \; n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

g. Montrer que la fonction $1/\Gamma$ est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) et que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-z/n}$$

où γ est la constante d'Euler (cf.exercice 1.7.c). *Pour la définition des produits infinis, on pourra démontrer le lemme suivant: si $(u_k)_{k \geq 1}$ est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $\forall K$ compact $\subset U$, $\sum_{k \geq 1} \sup_K |u_k| < +\infty$, alors, pour $z \in U$,*

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{1 \leq k \leq N} (1 + u_k(z)) = H(z)$$

où H est holomorphe sur U, notée $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + u_k)$ et telle que

$$H(z) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \geq 1, avec\ u_k(z) = -1.$$

INTEGRATION, Feuille d'exercices 6

Exercice 6.1.
a. On considère une norme sur $\mathbb{R}^n$, notée $\|\cdot\|$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels α, β pour que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+\|x\|)^\beta} < +\infty, \qquad \int_{\|x\|\leq 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < +\infty.$$

b. On suppose que $n \geq 2$ et on pose, en désignant par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$, et pour $\lambda > 0$

$$C_{1,\lambda} = \{(x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \|x'\| \leq \lambda |x_1|\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels α, β pour que

$$\int_{C_{1,\lambda}} \frac{dx}{(1+|x_1|)^\beta} < +\infty, \qquad \text{pour tout compact } K,\ \int_{C_{1,\lambda}\cap K} \frac{dx}{|x_1|^\alpha} < +\infty.$$

Montrer que ceci permet de démontrer *(a)* sans utiliser de changement de variables.

Exercice 6.2.
Soit n un entier ≥ 2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|$ la norme euclidienne de x.
a. Démontrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = 1$.
b. Soit $R \in \mathbb{R}_+$. On note $B^n(R)$ la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R et $|B^n(R)|$ son volume. Montrer que

$$|B^n(R)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n.$$

c. On note $S^{n-1}(R)$ la sphère de centre 0 et de rayon R (le bord de $B^n(R)$). En utilisant les résultats du problème 6.1, calculer le volume $n-1$ dimensionnel de $S^{n-1}(R)$, noté $|S^{n-1}(R)|$. Calculer

$$\frac{d}{dR}|B^n(R)|$$

et donner une justification intuitive du résultat.
d. Calculer le volume de l'ellipsoïde

$$\{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{1\leq j\leq n} \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1\}$$

(les a_j sont des paramètres > 0).

e. Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle définie positive. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\langle Ax,x\rangle} dx.$$

f. Soit B une matrice $n \times n$ symétrique réelle. Calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\epsilon\|x\|^2} e^{-i\pi\langle Bx,x\rangle} dx.$$

g. Soient A, B des matrices $n \times n$ symétriques réelles telles que $\det(A + iB) \neq 0$ et $A \geq 0$ (i.e. $\langle Ax, x\rangle \geq 0$). Calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\epsilon\|x\|^2} e^{-\pi\langle(A+iB)x,x\rangle} dx.$$

Exercice 6.3.
Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale 1. On pose, pour $\epsilon > 0$, $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$.
a. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $u * \rho_\epsilon$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\epsilon \to 0_+$.
b. On considère $u = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $\rho(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$. A-t-on convergence de $u * \rho_\epsilon$ vers u dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 6.4 *(suite de l'exercice 5.6)***.**
La classe de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, est définie par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ pour tous les multi-indices } \alpha, \beta, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| = p_{\alpha\beta}(u) < \infty\}$$

où l'on désigne par multi-indice un $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\beta \in \mathbb{N}^n, \partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \ldots \partial_{x_n}^{\beta_n}$.
a. Montrer que $e^{-\|x\|^2}$, ($\|x\|$ est la norme euclidienne de x) et plus généralement, si A est une matrice symétrique définie positive $n \times n$, la fonction $v_A(x) = e^{-\pi\langle Ax,x\rangle}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que les $p_{\alpha\beta}$ sont des semi-normes et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet.
b. On rappelle que la transformée de Fourier de u est définie par

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\cdot\xi} u(x) dx.$$

Montrer que la transformation de Fourier est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. *On pourra remarquer que*

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} \partial_x^\alpha (x^\beta u)(x) dx (2i\pi)^{|\beta|-|\alpha|}(-1)^{|\beta|}.$$

c. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx e^{-\pi\xi^2} = e^{-\pi\xi^2}$ *(la seconde égalité peut être obtenue en prenant la dérivée par rapport à* ξ *de* $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$*).* Montrer que pour A définie positive

$$\widehat{v_A}(\xi) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}.$$

d. On pose pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\epsilon > 0$, $u_\epsilon(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} d\xi$. Montrer que

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(x+\epsilon y) - u(x)\big) e^{-\pi|y|^2} dy + u(x).$$

Montrer la formule d'inversion de Fourier: $u(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$.

e. Montrer que la transformation de Fourier se prolonge de manière unique en une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6.5.
En effectuant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes

$$\iint_{x>0,\ y>0,\ x+y<a} \frac{3y}{\sqrt{1+(x+y)^3}} dxdy, \qquad a > 0,$$

$$\iint_{x>0,\ y>0,} |x^4 - y^4| e^{-(x+y)^2} dxdy \qquad \text{(examiner le changement} \quad \phi(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)).$$

Problème 6.1. Coordonnées polaires et intégration sur la sphère de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dxdy = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

2. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, démontrer en utilisant le changement de variables $(x_1, x_2) = (y\cos\theta, y\sin\theta)$ que

$$I = \iiint f(x_1,x_2,x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{y>0, |\theta|<\pi} f(y\cos\theta, y\sin\theta, x) y dy d\theta \right) dx,$$

puis en utilisant un nouveau changement en dimension deux $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ que

$$I = \int_0^{+\infty} \iint_{|\theta|<\pi,\ 0<\phi<\pi} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)\sin\phi\ d\theta\ d\phi\ r^2 dr.$$

On pose, par exemple pour g continue sur $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathbf{S}^2} g(\omega)d\sigma_2(\omega) = \iint_{|\theta|<\pi,\ 0<\phi<\pi} g(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\sin\phi\ d\theta\ d\phi.$$

Montrer que pour $f \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^2} f(r\omega)d\sigma_2(\omega)r^2 dr.$$

3. Soit n un entier ≥ 2 et $F \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$. On suppose définie l'intégrale d'une fonction continue sur la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$ et démontrée la formule (pour $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(r\omega)d\sigma_{n-1}(\omega)r^{n-1}dr.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})dx_1 \cdots dx_n dx_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\omega\in\mathbf{S}^{n-1}, y>0} F(y\omega, x)d\sigma_{n-1}(\omega)y^{n-1}dydx, \end{aligned}$$

puis en utilisant un nouveau changement en dimension deux $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ que

$$J = \int_0^{+\infty}\iint_{\omega\in S^{n-1},\ 0<\phi<\pi} f(r\omega\sin\phi, r\cos\phi)(\sin\phi)^{n-1}\ d\sigma_{n-1}(\omega)\ d\phi\ r^n dr.$$

Pour g continue sur la sphère $\mathbf{S}^n$, on pose

$$\int_{\mathbf{S}^n} g(\Omega)d\sigma_n(\Omega) = \int_{0<\phi<\pi}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(\omega\sin\phi, \cos\phi)(\sin\phi)^{n-1}\ d\sigma_{n-1}(\omega)\ d\phi.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^n} F(r\Omega)d\sigma_n(\Omega)r^n dr.$$

Problème 6.2.
a. Soient $u, v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ supportées dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_{\mathbb{R}} u(x-t)v(t)dt$, $\int_{\mathbb{R}} v(x-t)u(t)dt$ ont un sens, sont égales et coïncident avec $u * v$ lorsque $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. On notera ces intégrales $(u * v)(x)$.
b. On pose $x_+ = \max(x, 0)$. Soient $a > 0, b > 0$. Montrer que

$$x_+^{a-1} * x_+^{b-1} = B(a,b)x_+^{a+b-1} \qquad \text{avec} \qquad B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt.$$

c. Montrer que $\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a,b)\Gamma(a+b)$ *(on pourra faire le produit scalaire avec e^{-t} dans la formule de convolution ci-dessus).*
d. Montrer que, pour $0 < a < 1$, $B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} s^{-a}(1+s)^{-1}ds$ *(on pourra faire le changement de variable $t = 1/(1+s)$).*
e. Montrer la formule des compléments: pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}.$$

on pourra utiliser les résultats du problème 5.2.