HOMMAGE À LAURENT SCHWARTZ

par Nicolas Lerner

le mercredi 26 novembre 2003

à l'Université de Rennes

Laurent Schwartz dans son bureau à l'Ecole Polytechnique

1. Introduction

Laurent Schwartz est mort le jeudi 4 juillet 2002. Première médaille Fields française en 1950 à l'âge de 35 ans, son œuvre a profondément et durablement transformé l'analyse mathématique.

Ecoutons Harald Bohr, qui le 30 août 1950, a présenté la médaille Fields à Schwartz, au congrès international des mathématiciens, qui se tenait à Harvard.
Le travail de Schwartz sur les distributions restera certainement comme l'un des grands classiques de notre temps . . . La merveilleuse harmonie de la structure de cette théorie mène également à des applications multiples en théorie spectrale, théorie du potentiel et transforme complètement la compréhension des équations aux dérivées partielles linéaires.

Nous verrons dans cet exposé plusieurs exemples illustrant ce discours du mathématicien Harald Bohr (le jeune frère du physicien Niels Bohr).

Nous n'éviterons pas le débat sur la paternité de la théorie des distributions et nous verrons l'originalité et la profondeur de la contribution de Schwartz.

Nous donnerons également plusieurs éléments biographiques de la vie de Laurent Schwartz, qui fut un "grand intellectuel" dans la tradition française universaliste. Il faut lire ses mémoires, *Un mathéma ticien aux prises avec le siècle* (Odile Jacob, 1997) pour se rendre compte de la diversité de ses centres d'intérêt. Son livre est aussi un témoignage de cette extraordinaire ambition de l'intellectuel, qui se "sentait responsable du monde entier".

2. Le début de l'histoire

Commençons avec la fonction de Dirac, dérivée de la fonction d'Heaviside. On veut calculer la "dérivée" de la fonction

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0, \\ 0 & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

C'est évidemment désespéré mais Heaviside (1850-1925), avec son "calcul opérationnel" avait montré que des manipulations formelles et aisées pouvaient mener à des résultats corrects. Le papier d'Heaviside, soumis aux *Proceedings of the Royal Society* fut rejeté car le referee (Burnside) écrivit dans son rapport

This paper contains errors of substance and has irredeemable inadequacies in proof.

Il n'est pas impossible qu'Oliver Heaviside ait quelque peu cherché la difficulté avec des déclarations à l'emporte-pièce du type

It is shocking that young people should be addling their brains over mere logical subtleties, trying to understand the proof of one obvious fact in terms of something equally ... obvious.

Exemple de calcul: On veut résoudre l'EDO

$$f'' - f' - 2f = 0, \quad f(0) = 1, f'(0) = 0.$$

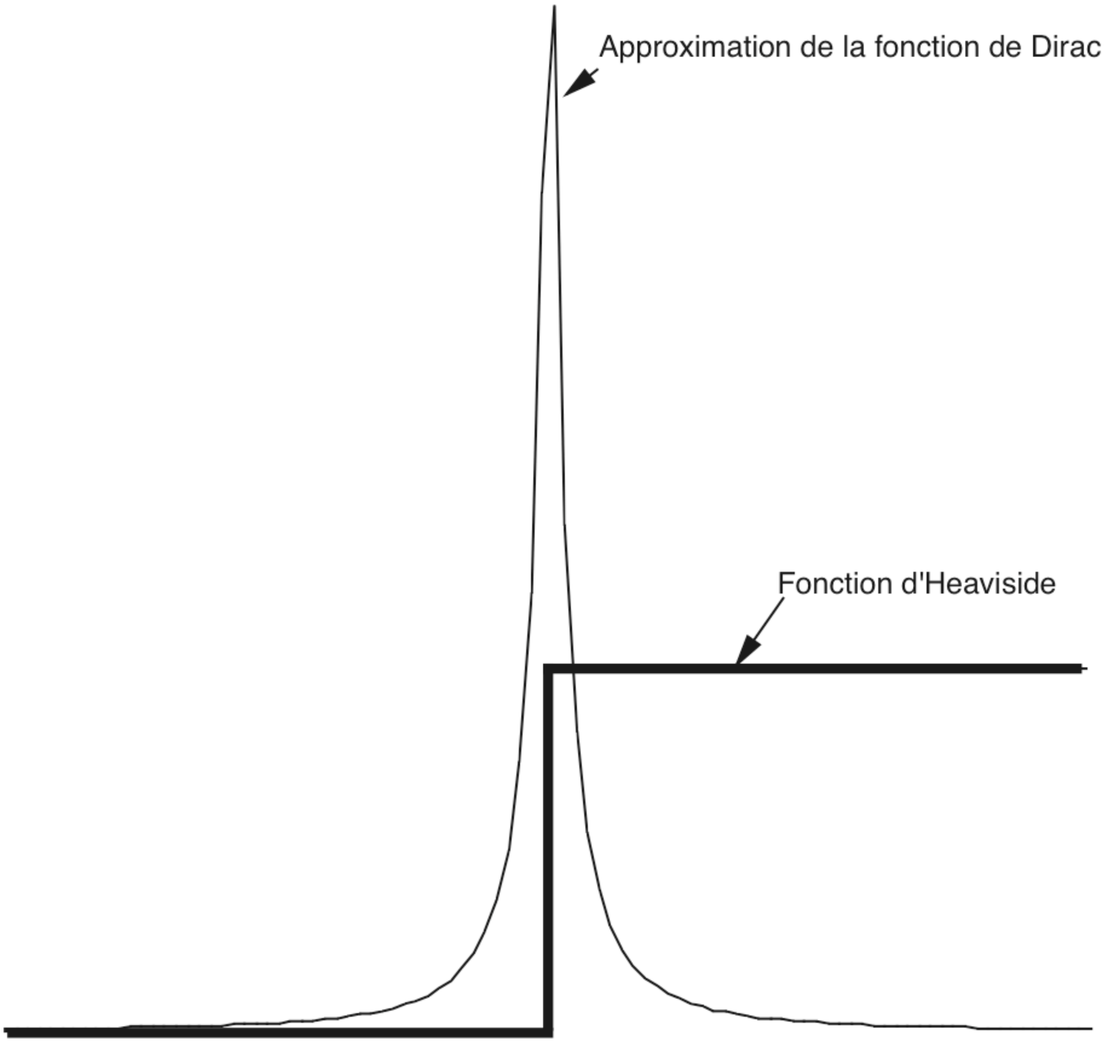
Heaviside écrit $\quad s^2F - s - (sF - 1) - 2F = 0,$

$$F = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1},$$

$$f = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}.$$

On peut justifier ces calculs en utilisant la transformée de Laplace,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$



En fait, on voudrait faire une intégration par parties formelle et écrire pour $\varphi \in C_c^1$

$$\int_{\mathbb{R}} H'(t)\varphi(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} H(t)\varphi'(t)dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = \varphi(0).$$

Ce point de vue est fructueux si l'on veut également comprendre intuitivement la dérivée seconde de la fonction d'Heaviside. Si on note $H' = \delta_0$, une intégration par parties formelle donne

$$\int_{\mathbb{R}} H_0''(t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \delta_0'(t)\varphi(t)dt$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t)\varphi'(t)dt = -\varphi'(0).$$

Plus on dérive H par ces manipulations formelles, plus l'intuition immédiate est prise en défaut et l'on est soulagé d'avoir une formule analytique manipulable telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0^{(n)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Le point de vue systématique de Schwartz, celui des fonctionnelles, implicitement adopté ici, est simplificateur, mais beaucoup d'auteurs avaient utilisé un formalisme voisin, notamment Frédéric Riesz.

Un autre exemple très exploré est celui des solutions faibles d'équations aux dérivées partielles. Considérons l'équation des ondes en une dimension, équation des cordes vibrantes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

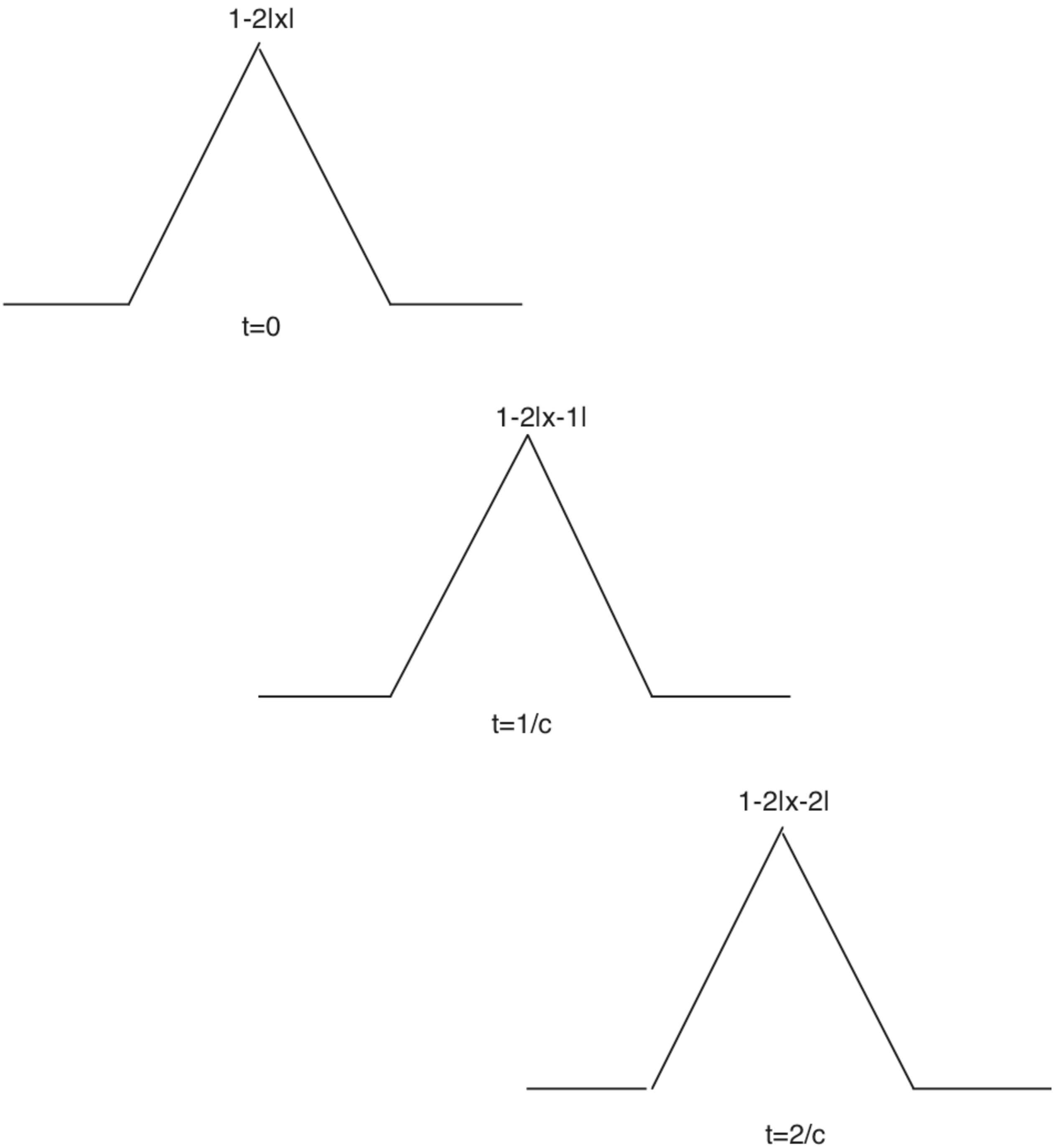
Elle a pour solutions

$$f(x - ct) + g(x + ct).$$

Pourquoi faudrait-il supposer f, g deux fois différentiables? On souhaite accepter par exemple $|x - ct|$ et dans le dessin suivant

$$\big(1 - 2|x - ct|\big)_+$$

avec le film


1-2|x|
t=0
1-2|x-1|
t=1/c
1-2|x-2|
t=2/c

Les solutions faibles de cette équation peuvent être également définies par une intégration par parties formelle. Une fonction $u(t,x)$, disons localement intégrable, est solution de

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

si pour toute fonction $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\iint u(t,x)\Big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\Big)dtdx = 0.$$

Ce type de définition a été abondamment utilisé par Jean Leray, Norbert Wiener, Solomon Bochner et surtout Serguei Sobolev (1908-1989), grand mathé maticien de l'école russe de Saint-Petersbourg.

Dès 1935, Sobolev écrit un article devenu classique, *Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles* dans lequel il traite des résultats d'existence et d'unicité pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques en utilisant des fonctionnelles, qui coïncident exactement avec les distributions d'ordre fini utilisées en 1948 par Laurent Schwartz.

Nous verrons que le point de vue de Schwartz est plus synthétique et englobe notamment une notion très générale et très commode de transformée de Fourier, ce dont Sobolev ne disposait pas. La profondeur de l'approche de Schwartz est également nette dans son étude systématique des espaces fonctionnels qui rentrent en jeu ainsi que de leurs propriétés topologiques. Nous examinerons ainsi deux contributions fondamentales et originales de Schwartz: le théorème de Paley-Wiener-Schwartz et le théorème des noyaux, sans doute un des sommets de l'analyse fonctionnelle.

Faisons une pause mathématique et parlons un peu de la vie de Schwartz dans la période 1915-1950.

Repères biographiques: de 1915 à 1950

Naissance à Paris en 1915. Son père Anselme Schwartz est un chirurgien réputé. Sa famille est lieé à la famille Debré et à la famille Hadamard. Les parents de Laurent Schwartz furent élevés dans la religion juive, mais n'ont pas donné d'éducation religieuse à leurs enfants.

Entre à l'Ecole normale en 1934. Adhésion en 1936 au POI, membre de la 4ème internationale. Agrégé en 1937, il épouse en 1938 Marie-Hélène Lévy, fille du mathématicien Paul Lévy. Dès 1940, l'état français de Vichy poursuit les juifs et Schwartz devient "Sélimartin" en 1942.

Thèse de doctorat en 1943 à Clermont-Ferrand, dirigée par Dieudonné. 1944 Grenoble. 1945 Professeur à Nancy.

1945-1950, Théorie des distributions.

1950, Médaille Fields.

3. La théorie des distributions

Décrivons l'approche originale de Schwartz pour la transformation de Fourier. On définit

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty, \forall \alpha, \beta,\ x^\alpha \partial_x^\beta u \text{ borné}\}$$

exemples: $e^{-|x|^2}$, $P(x)e^{-|x|^2}$ avec P polynôme.

C'est un espace de Fréchet (complet, famille dénombrable de semi-normes) et aussi un espace de Montel (les fermés bornés sont compacts).

Le $\mathcal{S}$ est pour fonctions sphériques (une autre erreur commune est de confondre Laurent Schwartz avec Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) qui a démontré l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Les fonctions sphériques sont les fonctions C^∞ nulles ainsi que toutes leurs dérivées au "pôle nord" de $\mathbb{S}^n$.

La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\cdot\xi} u(x)dx, \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\cdot\xi} \hat{u}(\xi)d\xi.$$

Les distributions tempérées: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On **définit**

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \hat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

en pensant au calcul formel

$$\int \hat{T}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \iint T(x)e^{-2i\pi x\xi}\varphi(\xi)d\xi dx = \int T(x)\hat{\varphi}(x)dx.$$

La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On peut par exemple calculer les transformées de Fourier de

$\mathcal{F}(e^{-i\pi x^2})(\xi) = e^{i\pi\xi^2}e^{-i\pi/4}$: intégrales de Fresnel,

$y(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{i(2\pi\xi)^3/3})(x)$ fonction d'Airy : $y'' = xy$.

Théorème de Paley-Wiener-Schwartz.

· *Si* $u \in C_c^\infty(B_1)$, *alors* $\hat{u}$ *est entière et pour tout* N

$$(*) \qquad |\hat{u}(\zeta)| \leq C_N(1+|\zeta|)^{-N} e^{2\pi|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

· *Réciproquement toute fonction entière satisfaisant* $(*)$ *est la transformée de Fourier d'une* $u \in C_c^\infty(B_1)$.

Il y a un énoncé analogue pour les distributions à support compact.

· *Si* $u \in \mathcal{E}'(B_1)$, *alors* $\hat{u}$ *est entière et il existe* N_0 *et* C_0 *tels que*

$$(**) \qquad |\hat{u}(\zeta)| \leq C_0(1+|\zeta|)^{N_0} e^{2\pi|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

· *Réciproquement toute fonction entière satisfaisant* $(**)$ *est la transformée de Fourier d'une* $u \in \mathcal{E}'(B_1)$.

R.Paley et N.Wiener ont démontré une version de ce théorème pour la transformée de Laplace de fonctions L^2 sur la demi-droite et L.Schwartz a démontré le théorème général énoncé ci-dessus.

Ecoutons Schwartz qui écrit à la page 255 de son autobiographie, *"Dans mon livre sur les distributions, j'avais conjecturé comme un fait évident que la transformation de Fourier jouerait un rôle essentiel (uniquement) dans la théorie des opérateurs différentiels à coefficients constants. La situation s'est radicalement transformée, car elle est devenue un outil universel ... C'est le triomphe de Fourier."*

Ces succès sont aussi ceux de Schwartz et c'est Lars Hörmander qui écrit dans la préface de son traité

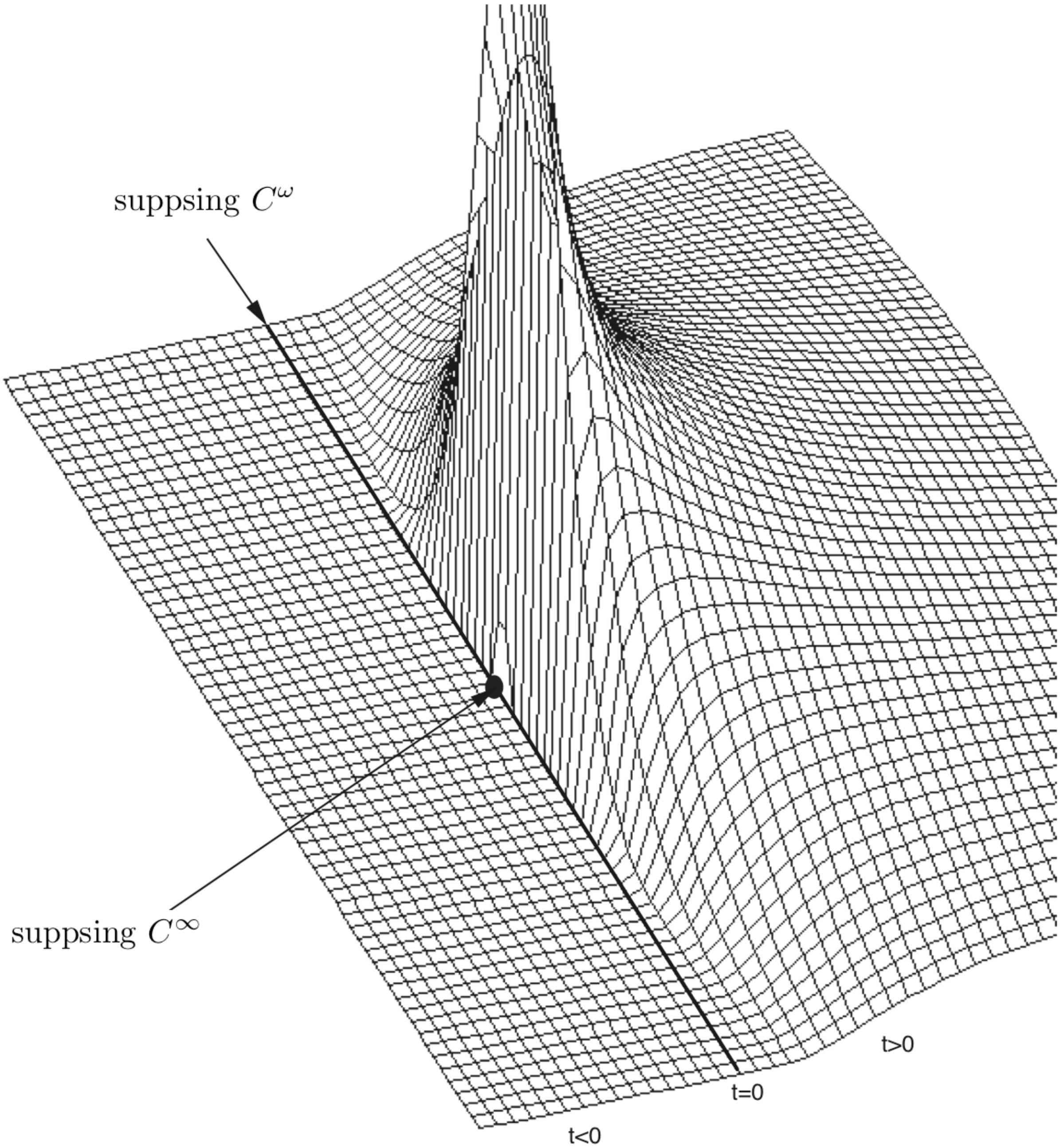
"Les progrès dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires doivent beaucoup à la théorie des distributions créée par Laurent Schwartz à la fin des années quarante. Celle-ci résuma une bonne partie de l'expérience accumulée et fournit un cadre idéal pour les développements qui ont suivi."

D'autres espaces de fonction-tests et de distributions

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega), \qquad \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans un ouvert Ω a une structure topologique plus compliquée (Henri Cartan a dit en 1945 à Schwartz que ces fonctions étaient monstrueuses). C'est un espace LF, localement convexe et complet mais non métrisable. Son dual topologique est l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω.

L'un des développements du théorème précédent est la notion de front d'onde d'une distribution, défini d'abord dans le cadre analytique par des méthodes cohomologiques par M.Sato, puis par L.Hörmander dans les cadres C^∞ ou H^s.



Solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$E(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} H(t) \exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{4t}\Big)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \triangle_x E = \delta_0(t) \otimes \delta_0(x)$$

$$\mathsf{suppsing}_\infty E = \{(0,0)\} \subset \mathsf{suppsing}_\omega E = \{0\} \times \mathbb{R}^n.$$

On peut considérer les fonctions plates comme monstrueuses et remarquer qu'elles interviennent naturellement dans l'équation de la chaleur.

Un des résultats fondamentaux de Schwartz est le

Théorème des noyaux. *Toute application continue* $\mathcal{K} : \mathcal{D}(\Omega_1) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *est donnée par un noyau* $K \in \mathcal{D}'(\Omega_2 \times \Omega_1)$*, formellement*

$$(\mathcal{K}\varphi_1)(x_2) = \int K(x_2, x_1)\varphi_1(x_1)dx_1$$

et plus précisément

$$\langle \mathcal{K}\varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_2),\mathcal{D}(\Omega_2)} = \langle K, \varphi_2 \otimes \varphi_1 \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_2\times\Omega_1),\mathcal{D}(\Omega_2\times\Omega_1)}.$$

Réciproquement, la donnée de K *comme ci-dessus définit un opérateur continu* $\mathcal{K}$*.*

Ce type de résultat n'est pas valide pour un espace de Banach de dimension infinie. Même dans le cas hilbertien, pour $L^2(\mathbb{R})$, les opérateurs donnés par

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int K(x,y)u(y)dy,$$

avec $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sont des opérateurs compacts, les opérateurs de Hilbert-Schmidt. L'identité, dont le noyau est $\delta(x-y)$, n'en fait pas partie. Il y a des conditions suffisantes de continuité L^2 comme le critère de Schur

$$\sup_x \int |K(x,y)|dy < +\infty, \quad \sup_y \int |K(x,y)|dx < +\infty,$$

mais elles sont fort loin d'être suffisantes et surtout ne contiennent pas les cas les plus intéressants comme la transformée de Hilbert $\quad \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x-y}\Big) \quad$ et les intégrales singulières. Rappelons

$$\mathsf{vp}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln|x|.$$

Le théorème des noyaux est le point de départ de la théorie des espaces nucléaires, développée notamment par Alexandre Grothendieck, qui fut élève de Schwartz, écrivit une thèse monumentale sur les Produits Tensoriels Topologiques. Louis Boutet de Monvel, Jacques-Louis Lions, Bernard Malgrange, André Martineau, André Unterberger, furent aussi élèves de Schwartz.

L'espace des distributions est **nucléaire**:

$$\mathcal{D}'\widehat{\otimes}_\pi F = \mathcal{D}'\widehat{\otimes}_\epsilon F,$$

(l'injection canonique est surjective). Pour E, F evt localement convexes, la topologie ϵ sur $E \otimes_\epsilon F = B(E'_\sigma, F'_\sigma)$ est la topologie naturelle sur les formes bilinéaires séparément continues sur $E'_\sigma \times F'_\sigma$.

La topologie projective sur $E \otimes F$ est la plus forte topologie localement convexe telle que

$$E \times F \longrightarrow E \otimes F \quad \text{soit continue.}$$

Eléments biographiques, 1950-2002

1951. Publication du traité sur la théorie des distributions. Membre de *l'Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki* en 1952. Professeur à Paris en 1953.

1957. Affaire Audin. Maurice Audin, jeune mathématicien, membre du PCA, élève de René de Possel, est arrêté, torturé et assassiné par les parachutistes du général Massu. Son ami Henri Alleg, arrêté presque simultanément, survivra et écrira *La Question*, ouvrage retentissant. Schwartz fut rapporteur dans le jury de la thèse d'Audin, soutenue *in abstentia*. Engagement de Schwartz dans le comité Audin.

1959. Professeur à l'Ecole Polytechnique où il engage une vaste réforme de l'enseignement. Il créera en 1966 le Centre de Mathématiques, avec le soutien du physicien Louis Michel.

1960. Signataire de l'appel des 121, recommandant l'insoumission, Schwartz est révoqué de son poste à l'X, qu'il réintégrera en 1963. Le travail scientifique de Schwartz s'oriente vers la théorie des probabilités, et notamment l'étude des équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle.

1967. Visite au Vietnam en guerre et rencontre avec Pham van Dong, premier ministre du Nord-Vietnam. Membre du tribunal Russell.

Années 70. Fondation du Comité des mathématiciens; défense de Leonid Plioutch (URSS), de José Luis Massera (Uruguay) et de bien d'autres.

Années 80, 90. Schwartz devient président du comité national d'évaluation des universités. Il recommande une dose de sélection à l'entrée de l'université.

Quelques références

[A] H.Alleg, *La question*, Editions de Minuit, 1958.

[L] J.Lützen, *The prehistory of the theory of distributions*, Springer-Verlag, 1981.

[S1] L.Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997.

[MS] V.Maz'ya, T.Shaposhnikova, *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, AMS, 1998.

[S] Pour la Science, numéro spécial, *Bourbaki, une sociéte secrète de mathématiciens* (mai 2000).

[T1] F.Treves, *Laurent Schwartz, 1915–2002, Biographical sketch*, Notices of the AMS **50** (2003), 9, 1072-1078.

[D] P.Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford university Press, 1947.

[S2] L.Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966 (1950).

[GS] I.Gel'fand, G.Shilov, *Generalized functions*, Academic Press, 1968 (1955).

[G] A.Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, vol. 16, Mem. Amer. Math. Soc., 1955.

[K] M.Kashiwara, *Introduction to microlocal analysis.*, Enseign. Math. **(2) 32** (1986), 227–259.

[T2] F.Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, 1967.

[F] F.Friedlander, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1982.

[H] L.Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vol. 1, Springer-Verlag, 1983.