LA RÉSOLUTION DE LA CONJECTURE DE NIRENBERG-TREVES

Séminaire Bourbaki

samedi 18 mars 2006
14:30 – 15:30

1. Présentation du problème

1.1. Le contre-exemple de Hans Lewy. En 1957, Hans Lewy démontre que l'opérateur

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

est non résoluble: il existe $f \in C^\infty$ telle que $L_0 u = f$ n'a pas de solution distribution, même localement.

Cette découverte crée une grande surprise pour plusieurs raisons. Tout d'abord, L_0 a une expression très simple et est aussi un opérateur tout à fait naturel: c'est l'opérateur de Cauchy-Riemann sur le bord de l'ouvert pseudo-convexe

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + 2\operatorname{Im} z_2 < 0\}.$$

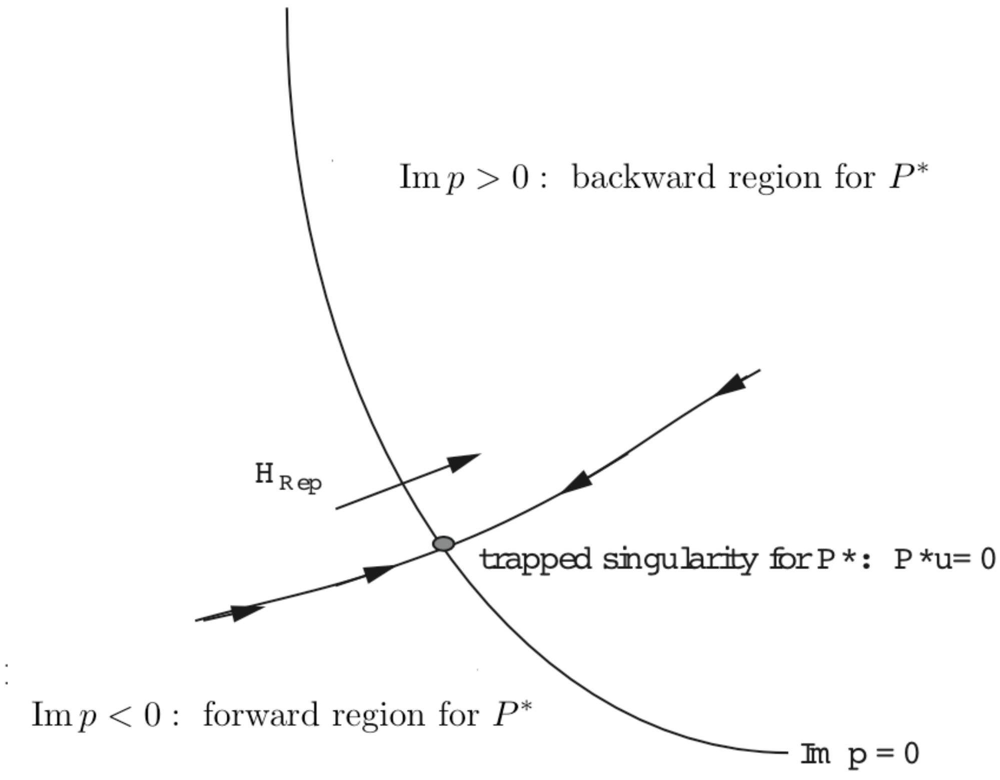
De plus, L_0 est un champ de vecteurs (complexe) qui ne s'annule pas et ne ressort donc pas des pathologies habituelles aux opérateurs à caractéristiques multiples.

En ce milieu des années cinquante, l'opinion générale est sans doute que tous les opérateurs "raisonnables" doivent être localement résolubles ; manifestement, L_0 est très raisonnable ... sans être résoluble.

Néanmoins en 1957, ce contre-exemple reste isolé et sans explication géométrique claire. C'est Lars Hörmander qui, en 1960, dégage les conditions géométriques liées au contre-exemple de Hans Lewy: si P est un opérateur de symbole principal p tel qu'il existe un point (x,ξ) pour lequel

$$p(x,\xi)=0 \text{ et } \{\mathrm{Re}\, p, \mathrm{Im}\, p\}(x,\xi)>0,$$

alors P est non localement résoluble au voisinage de x.



$$\{\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Im}\,p\} = H_{\mathrm{Re}\,p}(\mathrm{Im}\,p) > 0$$

On voit facilement que L_0 satisfait cette condition (ainsi d'ailleurs que "la plupart" des opérateurs différentiels).

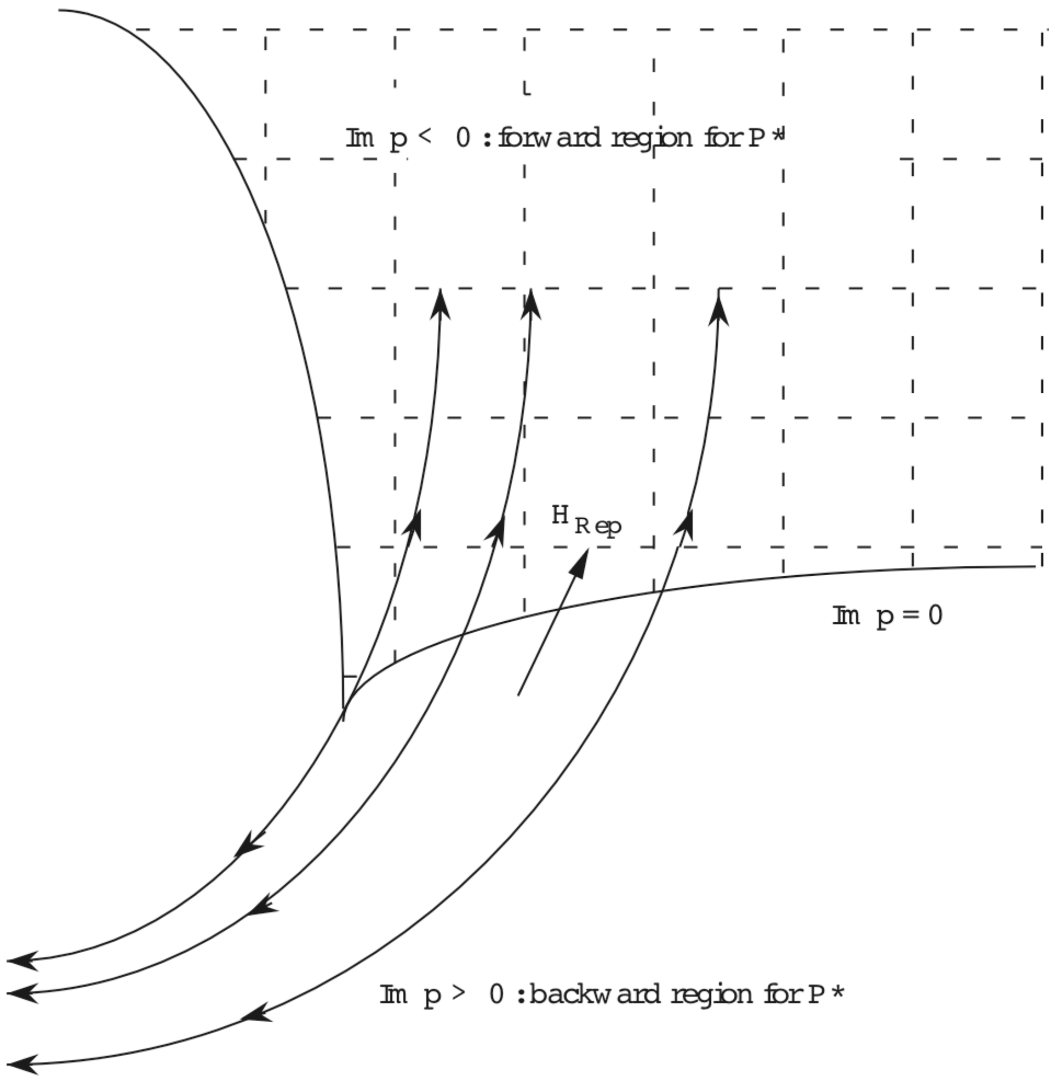
La géométrie relative des bicaractéristiques de $\mathrm{Re}\, p$ et du fermé $\{(x,\xi), \mathrm{Im}\, p(x,\xi) = 0\}$ peut être considérablement plus compliquée que la transversalité positive évoquée ci-dessus, même dans le cas d'un symbole analytique pour lequel $d\,\mathrm{Im}\, p \neq 0$: ordre de contact pair ou impair de la bicaractéristique, bicaractéristique incluse dans $\{\mathrm{Im}\, p = 0\}$. Sans l'hypothèse $d\,\mathrm{Im}\, p \neq 0$ et sans analyticité, la complexité potentielle de la géométrie semble effarante.

Peut-on trouver une condition géométrique intelligible sur le symbole principal d'un opérateur de type principal[1] qui soit équivalente à sa résolubilité locale?

Pour les opérateurs de type principal réel, comme un champ de vecteurs réel ne s'annulant pas, ou une équation strictement hyperbolique, la résolubilité locale est bien connue depuis les travaux de Hörmander en 1955. Comme le montre le contre-exemple de Lewy, la résolubilité des opérateurs de type principal à symbole complexe est plus délicate.

[1]Type principal signifie $dp \wedge \alpha \neq 0$ sur le fibré cotangent, où α est la 1-forme fondamentale donnée en coordonnées par $\sum \xi_j dx_j$. La condition $d_\xi p \neq 0$ implique que p est de type principal. On évite ainsi les opérateurs à caractéristiques multiples dont le comportement n'est pas déterminé uniquement par le symbole principal.

1.2. La conjecture de Nirenberg - Treves. En 1971, Louis Nirenberg et François Treves introduisent une condition géométrique, qu'ils nomment condition (ψ). Avant de décrire son expression analytique, examinons le dessin suivant.



Les singularités s'en vont à l'infini, le long du flot de $H_{\mathrm{Re}\,p}$,

$\mathrm{Im}\,p$ **ne change pas de signe de $-$ à $+$:**

pas de singularité piégée pour P^*, la résolubilité de P est attendue.

La formulation générale de la condition (ψ) pour un opérateur de type principal est la suivante:

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(zp)$ ne change pas de signe de $-$ à $+$ le long des bicaractéristiques orientées de $\mathrm{Re}(zp)$.

Des résultats de Jean-Michel Bony et Haïm Brézis sur les ensembles invariants par le flot d'un champ de vecteurs, montrent que cette condition est invariante par multiplication de p par un facteur elliptique complexe. Par exemple, multiplier l'opérateur par i induit que la partie réelle ne doit pas changer de signe de $+$ à $-$ le long du flot hamiltonien de la partie imaginaire. Ceci ajoute à la pertinence de cette condition relativement à la résolubilité locale, car cette dernière propriété ne doit pas être affectée par la multiplication par un facteur elliptique.

La conjecture de Nirenberg $-$Treves affirme que pour un opérateur pseudodifférentiel de type principal,

$$\boxed{\textbf{la condition } (\psi) \Longleftrightarrow \textbf{résolubilité locale}}$$

1.3. Un bref historique. Notion de perte de dérivées. On dira que L est localement résoluble avec une perte de μ dérivées si l'équation $Lu = f$ possède une solution locale u dans l'espace de Sobolev $H^{s+m-\mu}$ pour une source f dans H^s, où m est l'ordre de L.

La perte est nulle si et seulement si L est elliptique.
La perte est 1 pour des opérateurs de type principal réel. C'est la perte "standard", celle de $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Démontrer la résolubilité locale de l'opérateur L (d'ordre m) au voisinage d'un point x_0 avec perte de μ dérivées équivaut à établir l'existence d'un voisinage V_0 de x_0 et d'une constante C_0 tels que, pour toute fonction $u \in C_c^\infty(V_0)$,

$$(\mathrm{E}\mu) \qquad \mathbf{C_0}\|\mathbf{L}^*\mathbf{u}\|_{\mathbf{H^s}} \geq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H^{s+m-\mu}}} \quad .$$

Notons par exemple que, pour $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T = \operatorname{diam}(\operatorname{supp} u)$,

$$T\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2},$$

estimation avec perte d'une dérivée, qui se généralise aux opérateurs de type principal réel (d'ordre 1). Examinons l'historique des résultats pour les opérateurs de type principal complexe.

• 1973 • Richard Beals et Charles Fefferman démontrent la conjecture de Nirenberg-Treves pour des opérateurs *différentiels*, utilisant des éléments de travaux de Nirenberg et Treves (qui faisaient une hypothèse d'analyticité). Néanmoins, leur méthode est radicalement nouvelle en ce sens qu'ils construisent un calcul pseudo-différentiel non homogène, dépendant du symbole étudié, via une décomposition de Calderón-Zygmund dans l'espace des phases. Plus tard, en 1988, N.L. démontre que la condition (ψ) suffit à la résolubilité des équations pseudo-différentielles en dimension 2. Ces résultats, valides également pour certains problèmes aux limites non elliptiques comme le problème classique de la dérivée oblique, établissent la résolubilité avec perte d'une dérivée, la perte standard évoquée plus haut.

• 1978 • L'existence de solutions C^∞ pour des sources C^∞ est démontrée par Hörmander pour des équations satisfaisant la condition (P) (p et $\bar{p}$ satisfont la condition (ψ)). Pour un opérateur de ce type, satisfaisant également une condition de non-capture un résultat d'existence semi-globale est démontré.

• 1981 • A la suite d'un travail de Robert Moyer en dimension 2, Hörmander démontre que la condition (ψ) est nécessaire à la résolubilité locale.

• 1984 • Trépreau démontre que (ψ) suffit à la résolubilité dans la catégorie analytique (opérateurs microdifférentiels agissant sur des microfonctions).

• Une période noire • Publication pendant une douzaine d'années (1971-1983) d'articles affirmant que la condition (ψ) implique la résolubilité locale avec perte d'une dérivée. Articles peu lisibles, incomplets, empilement des errata. Un résultat tangible: confusion.

• 1994 • N.L. démontre que la condition (ψ) n'implique pas la résolubilité avec perte d'une dérivée pour des opérateurs pseudodifférentiels en dimension ≥ 3.

• 2004 • Nils Dencker démontre que la condition (ψ) implique la résolubilité avec perte de $\frac{3}{2} + \epsilon$ derivées, pour tout $\epsilon > 0$, établissant la validité de la conjecture de Nirenberg-Treves.

• 2005 • En suivant la structure du travail de Dencker, N.L. démontre que la condition (ψ) implique la résolubilité avec perte de $\frac{3}{2}$ derivées.

Nous allons maintenant fournir quelques éléments de démonstration du caractère suffisant de la condition (ψ) pour la résolubilité locale. Avant d'examiner ces éléments, nous pouvons faire une pause et réfléchir à la situation inconfortable dans laquelle nous sommes pour démontrer l'estimation $(E\mu)$ avec une perte $\mu > 1$ (situation forcée par les contre-exemples). Supposons (sans perte de généralité) que l'ordre de notre opérateur L soit 1, que $s = 0$ et $\mu = 1+\mu_0,\ \mu_0 > 0$. Nous devons démontrer pour $u \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(V_0)$ que

$$(E\mu) \qquad C_0 \left\| L^* u \right\|_{L^2} \geq \left\| u \right\|_{H^{-\mu_0}} .$$

Comme la condition (ψ) ne prend en compte que le symbole principal, la résolubilité doit être préservée si L est perturbé par un opérateur M_0 d'ordre zéro. On veut donc également obtenir

$$C_1 \left\| L^* u + M_0 u \right\|_{L^2} \geq \left\| u \right\|_{H^{-\mu_0}} .$$

Malheureusement, la seconde estimation n'est pas une conséquence apparente de la première car

$$\left\| M_0 u \right\|_{L^2} \sim \left\| u \right\|_{L^2} \gg \left\| u \right\|_{H^{-\mu_0}} .$$

Le même type de difficulté se pose si l'on souhaite utiliser une partition de l'unité $1 = \sum \chi_j(x, \xi)$ microlocale avec des symboles χ_j qui sont (naturellement) d'ordre 0. Les inévitables commutateurs de L^* avec les opérateurs $\chi_j(x, D)$ seront donc d'ordre zéro, engendrant des restes de taille $\|u\|_{L^2}$ qui ne peuvent s'absorber dans le membre de droite de l'inégalité

$$(E\mu) \qquad\qquad C_0 \|L^* u\|_{L^2} \geq \|u\|_{H^{-\mu_0}}$$

pour les mêmes raisons que précédemment. Comme il semble impossible de ne pas utiliser de microlocalisation et d'arguments de perturbation pour traiter ce problème, Dencker utilise une hypothèse de type principal fort pour le symbole principal p de L^*, $d_\xi p \neq 0$, une partition de l'unité homogène qui dépend du symbole p et un argument de forme normale pour le symbole total. Ce point ne peut être qualifié de technique qu'après sa résolution. Nous accepterons donc ici que le problème peut se réduire à l'étude d'une équation d'évolution

$$L^* = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + iq(t, x, D_x), \quad q \text{ réel d'ordre 1},$$
$$q(t, x, \xi) > 0, s > t \Longrightarrow q(s, x, \xi) \geq 0.$$

2. Géométrie de la condition (ψ)

Nous donnerons une version semi-classique des estimations $(E\mu)$ et considérerons des opérateurs

$$L^* = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + i\mathsf{Op}(q(t, \underbrace{x, \xi}_{X}, \Lambda)), \quad q \text{ réel d'ordre 1.}$$

2.1. Description de la structure de base. Soit $q(t, X, \Lambda)$ une fonction C^∞ réelle définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{2n}_X \times [1, +\infty)$, telle que

$$|\partial_X^k q(t, X, \Lambda)| \leq \gamma_k \Lambda^{1-\frac{k}{2}}$$

$$(\psi) \qquad s > t \quad \text{et } q(t, X, \Lambda) > 0 \Longrightarrow q(s, X, \Lambda) \geq 0.$$

On introduit pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{X}_+(t) = \cup_{s \leq t}\{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(s, X) > 0\},$$
$$\mathbb{X}_-(t) = \cup_{s \geq t}\{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(s, X) < 0\},$$
$$\mathbb{X}_0(t) = \mathbb{X}_-(t)^c \cap \mathbb{X}_+(t)^c,$$

Grâce à la condition (ψ), $\mathbb{X}_+(t), \mathbb{X}_-(t)$ sont des ouverts disjoints de $\mathbb{R}^{2n}$. Les ensembles $\mathbb{X}_0(t), \mathbb{X}_\pm(t)$ sont deux à deux disjoints et de réunion $\mathbb{R}^{2n}$. Si t croît, $\mathbb{X}_+(t)$ croît et $\mathbb{X}_-(t)$ decroît.

$$\mathbb{X}_+(t) = \cup_{s\le t}\{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(s,X) > 0\} \nearrow \text{ de } t \subset \{X, q(t,X) \ge 0\}$$

$$\mathbb{X}_-(t) = \cup_{s\ge t}\{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(s,X) < 0\} \searrow \text{ de } t \subset \{X, q(t,X) \le 0\}$$

$$\mathbb{X}_0(t) = \mathbb{X}_-(t)^c \cap \mathbb{X}_+(t)^c \subset \{X, q(t,X) = 0\}$$

$$\overline{\mathbb{X}_\pm(t)} \subset \mathbb{X}_0(t) \cup \mathbb{X}_\pm(t) \text{ car } (\mathbb{X}_0(t) \cup \mathbb{X}_\pm(t))^c = \mathbb{X}_\mp(t)(\text{ouvert})$$

$\mathbb{X}_\pm(t)$ sont les ensembles pertinents sur lesquels $\pm q(t,X) \ge 0$. Si l'on prenait la définition $\{X, q(t,X) \ge 0\}$, on perdrait la propriété de monotonie croissante et le bénéfice de (ψ). On définit la fonction de distance signée[2]

$$\delta_0(t,X) = \underbrace{|X - \mathbb{X}_-(t)|}_{\substack{\text{supporté dans} \\ \mathbb{X}_-(t)^c = \mathbb{X}_+(t) \cup \mathbb{X}_0(t)}} - \underbrace{|X - \mathbb{X}_+(t)|}_{\substack{\text{supporté dans} \\ \mathbb{X}_+(t)^c = \mathbb{X}_-(t) \cup \mathbb{X}_0(t)}} .$$

On a $\quad t \mapsto \delta_0(t,X) \quad$ croissante,

$$\{X, \pm q(t,X) > 0\} \subset \{X, \pm\delta_0(t,X) > 0\} \subset \{X, \pm q(t,X) \ge 0\},$$

$$|\delta_0(t,X) - \delta_0(t,Y)| \le 2|X - Y|$$

et

$$\{X, \delta_0(t,X) = 0\} \subset \{X, q(t,X) = 0\}.$$

---

[2]En fait pour éviter les cas $\mathbb{X}_\pm(t) = \emptyset$, il faut prendre

$$\delta_0(t,X) = \min(|X - \mathbb{X}_-(t)|, \Lambda^{1/2}) - \min(|X - \mathbb{X}_+(t)|, \Lambda^{1/2}).$$

Lemme 1. Décomposition de Calderón-Zygmund. *Soit* Γ *une norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^N$ *et* f *un symbole dans* $S(\Lambda^m, \Lambda^{-1}\Gamma)$ *avec* $m > 0$*, i.e.* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *est telle que*

$$\|f^{(j)}(X)\|_\Gamma \le \gamma_j \Lambda^{m-\frac{j}{2}}.$$

On définit

$$\lambda(X) = 1 + \max_{\substack{0\le j<2m\\ j\in\mathbb{N}}} \big(\|f^{(j)}(X)\|_\Gamma^{\frac{2}{2m-j}}\big).$$

Alors $f \in S(\lambda^m, \lambda^{-1}\Gamma)$ *et l'application de* $S(\Lambda^m, \Lambda^{-1}\Gamma)$ *dans* $S(\lambda^m, \lambda^{-1}\Gamma)$ *est continue. De plus avec* $\gamma = \max_{\substack{0\le j<2m\\ j\in\mathbb{N}}} \gamma_j^{\frac{2}{2m-j}}$*, on a pour tout* $X \in \mathbb{R}^N$*,*

$$1 \le \lambda(X) \le 1 + \gamma\Lambda.$$

Exemples

- $m = 1, \quad \lambda(X) = 1 + \max\big(|f(X)|, |f'(X)|^2\big),$

  $|f^{(j)}| \le \lambda^{1-\frac{j}{2}} \qquad (\text{nota: si } j \ge 2,\ |f^{(j)}| \lesssim \Lambda^{\frac{2-j}{2}} \lesssim \lambda^{\frac{2-j}{2}}).$

- $m = 3/2, \quad \lambda(X) = 1 + \max\big(|f(X)|^{2/3}, |f'(X)|, |f''(X)|^2\big),$

  $|f^{(j)}| \le \lambda^{\frac{3}{2}-\frac{j}{2}} \qquad (\text{nota: si } j \ge 3,\ |f^{(j)}| \lesssim \Lambda^{\frac{3-j}{2}} \lesssim \lambda^{\frac{3-j}{2}}).$

- $m = 2, \quad \lambda(X) = 1+\max\big(|f(X)|^{\frac{1}{2}}, |f'(X)|^{\frac{2}{3}}, |f''(X)|, |f'''(X)|^2\big),$

  $|f^{(j)}| \le \lambda^{2-\frac{j}{2}} \qquad (\text{nota: si } j \ge 4,\ |f^{(j)}| \lesssim \Lambda^{\frac{4-j}{2}} \lesssim \lambda^{\frac{4-j}{2}}).$

Lemme 2. Classe propre du symbole d'ordre 3/2 $\mathbf{\Lambda^{1/2}q}$. *Soit $q(t,X)$ et $\delta_0(t,X)$ comme ci-dessus, Γ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{2n}$. On définit $\langle s\rangle = (1+s^2)^{1/2}$ et*

$$\mu(t,X) = \langle \delta_0(t,X)\rangle^2 + |\Lambda^{1/2}q'_X(t,X)| + |\Lambda^{1/2}q''_{XX}(t,X)|^2.$$

La métrique $\mu^{-1}(t,\cdot)\Gamma$ est à variation lente[3]*. De plus il existe C telle que*

$$\mu(t,X) \le C\Lambda, \quad \frac{\mu(t,X)}{\mu(t,Y)} \le C(1+|X-Y|^2),$$

et l'on a

$$\Lambda^{1/2}q(t,X) \in S(\mu(t,X)^{3/2}, \mu^{-1}(t,\cdot)\Gamma).$$

N.B. La condition de variation lente et le fait que $\mu \ge 1$ assurent que la métrique $\mu^{-1}\Gamma$ est une métrique de Weyl-Hörmander, utilisable pour le calcul pseudo-différentiel.

[3] Une métrique $\mathbb{R}^{2n} \ni X \mapsto g_X \in$ formes quadratiques $\gg 0$, est à variation lente s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$g_X(Y-X) \le C^{-1} \Longrightarrow \forall T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad C^{-1}g_Y(T) \le g_X(T) \le Cg_Y(T).$$

Lemme 3. Cl. pr. du symbole d'ordre 1, $\Lambda^{1/2}\mathbf{q}\mu^{-1/2}$.
Soit $q(t,X), \delta_0(t,X), \mu(t,X)$ comme ci-dessus. On définit

$$\nu(t,X) = \langle \delta_0(t,X)\rangle^2 + |\Lambda^{1/2} q'_X(t,X)\mu(t,X)^{-1/2}|^2.$$

La métrique $\nu^{-1}(t,\cdot)\Gamma$ varie lentement. Il existe C telle que

$$\nu(t,X) \leq 2\mu(t,X) \leq C\Lambda, \quad \frac{\nu(t,X)}{\nu(t,Y)} \leq C(1+|X-Y|^2),$$

et l'on a

$$\Lambda^{1/2} q(t,X) \in S(\mu(t,X)^{1/2}\nu(t,X), \nu(t,\cdot)^{-1}\Gamma).$$

Definition. Classification des points.

Soit $0 < r_1 \leq 1/2$. On dira que

(i) Y est un point positif (resp. négatif) au niveau t si

$$\delta_0(t,Y) \geq r_1 \nu(t,Y)^{1/2}, \quad \text{(resp.} \quad \delta_0(t,Y) \leq -r_1\nu(t,Y)^{1/2}).$$

(ii) Y est un point de gradient au niveau t si

$$|\Lambda^{1/2} q'_Y(t,Y)\mu(t,Y)^{-1/2}|^2 \geq \nu(t,Y)/4 \text{ et } \delta_0(t,Y)^2 < r_1^2 \nu(t,Y).$$

(iii) Y est un point négligeable dans les autres cas

$$|\Lambda^{1/2} q'_Y(t,Y)\mu(t,Y)^{-1/2}|^2 < \nu(t,Y)/4 \text{ et } \delta_0(t,Y)^2 < r_1^2 \nu(t,Y).$$

Noter que ceci implique $\nu(t,Y) \leq 1 + r_1^2\nu(t,Y) + \nu(t,Y)/4 \leq 1 + \nu(t,Y)/2$ et donc $\nu(t,Y) \leq 2$.

2.2. Quelques résultats sur les fonctions $C^{2,1}$.

Une version triviale. *Soient* f_1, f_2 *des fonctions deux fois différentiables sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *telles que* $f_1(x) > 0 \Longrightarrow f_2(x) \geq 0$. *Si pour* $\omega \in \Omega$, *les conditions* $f_1(\omega) = f_2(\omega) = 0, \quad df_1(\omega) \neq 0, df_2(\omega) = 0$ *sont vérifiées, alors* $f_2''(\omega) \geq 0$.

Lemme 4. *Soient* f_1, f_2 *des fonctions réelles définies sur la boule unité de* $\mathbb{R}^N$. *Supposons que* f_1 *est* $C^{1,1}$, f_2 *est* $C^{2,1}$ *et* $f_1(x) > 0 \Longrightarrow f_2(x) \geq 0$. *On définit* ρ_1, ρ_2, *par*

$$\rho_1 = \max\bigl(|f_1(0)|^{\frac{1}{2}}, |f_1'(0)|\bigr),$$
$$\rho_2 = \max\bigl(|f_2(0)|^{\frac{1}{3}}, |f_2'(0)|^{\frac{1}{2}}, |f_2''(0)|\bigr),$$

et l'on suppose que $0 < \rho_2 \leq \rho_1 \leq 1$. *Supposons également que pour* $0 < \kappa$,

$$\rho_1 = |f_1'(0)| > 0, \quad \max\bigl(|f_2(0)|^{1/3}, |f_2'(0)|^{1/2}\bigr) \leq \kappa |f_2''(0)|,$$
$$B(0, \kappa^2 \rho_2) \cap \{x \in B_1, f_1(x) \geq 0\} \neq \emptyset.$$

Alors on a $|f_2''(0)_-| \lesssim \kappa \rho_2$, *où* $f_2''(0)_-$ *est la partie négative de la forme quadratique* $f_2''(0)$.

2.3. Inégalités pour les symboles d'ordre 3/2.

Le lemme 4 permet de démontrer le

Lemme 5. Contrôle de la dérivée seconde. *Soient q, δ_0, μ, ν comme ci-dessus. Pour des nombres réels t', t, t'', et $X \in \mathbb{R}^{2n}$, on définit*

$$N(t', t'', X) = \frac{\langle \delta_0(t', X) \rangle}{\nu(t', X)^{1/2}} + \frac{\langle \delta_0(t'', X) \rangle}{\nu(t'', X)^{1/2}},$$

et

$$R(t, X) = \Lambda^{-1/2} \mu(t, X)^{1/2} \nu(t, X)^{-1/2} \langle \delta_0(t, X) \rangle.$$

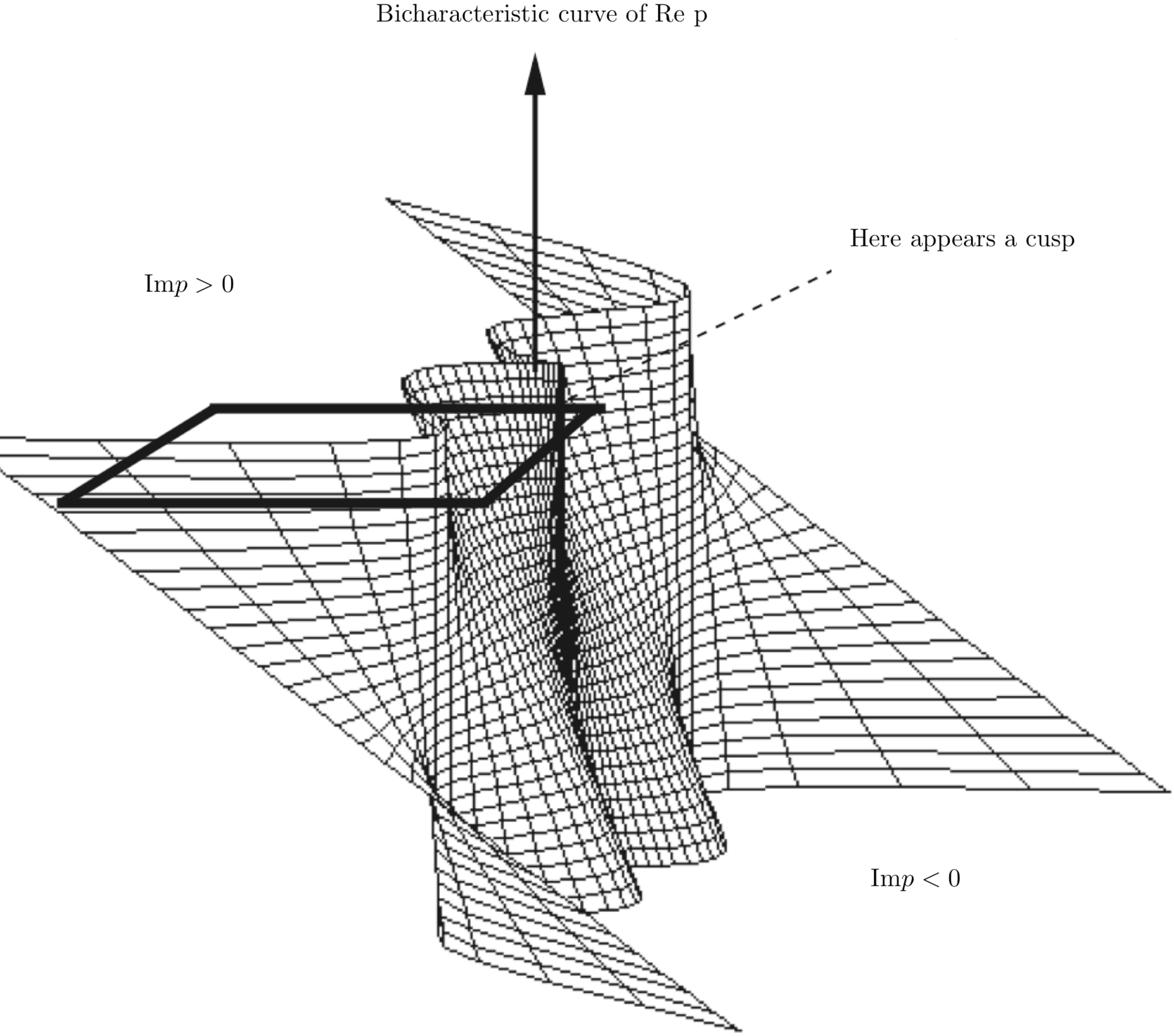
Alors il existe une constante $C_0 \geq 1$, telle que, pour $t' \leq t \leq t''$, on ait

$$C_0^{-1} R(t, X) \leq$$
$$N(t', t'', X) + \frac{\delta_0(t'', X) - \delta_0(t, X)}{\nu(t'', X)^{1/2}} + \frac{\delta_0(t, X) - \delta_0(t', X)}{\nu(t', X)^{1/2}}.$$

En d'autres termes, parce que la condition (ψ) est vérifiée pour le symbole $\tau - iq$, on dispose d'un contrôle précis du terme

$$|q''_{XX}(t, X)| \nu(t, X)^{-1/2} \langle \delta_0(t, X).$$

On peut illustrer cela par le dessin suivant.



Les cusps surviennent à la fin ou au début des bicaractéristiques, jamais entre des points réguliers. La condition (ψ) implique une régularité supplémentaire de l'ensemble où le changement de signe se produit.

3. Estimations d'énergie

3.1. Un nouveau multiplicateur.

Quasi-convexité. Une fonction différentiable ϕ d'une variable est dite quasi-convexe sur $\mathbb{R}$ si $\dot{\phi}(t)$ ne change pas de signe de $+$ à $-$ pour t croissant. En particulier, une fonction différentiable convexe est telle que $\dot{\phi}(t)$ est croissante et donc est quasi-convexe.

Définition. Soient $\sigma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, $C_1 > 0$ et soit $\rho_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. On dira que ρ_1 est quasi-convexe par rapport à (C_1, σ_1) si pour $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$,

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \Longrightarrow$$
$$\rho_1(t_2) \leq C_1 \max\bigl(\rho_1(t_1), \rho_1(t_3)\bigr) + \sigma_1(t_3) - \sigma_1(t_1).$$

Lorsque σ_1 est constante et $C_1 = 1$, c'est la définition de la quasi-convexité.

Lemme 6. *Soient $\sigma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. On définit*

$$\rho_1(t) = \inf_{t' \leq t \leq t''} \Bigl(\omega(t') + \omega(t'') + \sigma_1(t'') - \sigma_1(t')\Bigr).$$

Alors la fonction ρ_1 est quasi-convexe par rapport à $(2, \sigma_1)$.

On rappelle que

$$\mu(t,X) = \langle \delta_0(t,X)\rangle^2 + |\Lambda^{1/2} q'_X(t,X)| + |\Lambda^{1/2} q''_{XX}(t,X)|^2,$$
$$\nu(t,X) = \langle \delta_0(t,X)\rangle^2 + |\Lambda^{1/2} q'_X(t,X)\mu(t,X)^{-1/2}|^2.$$

Définition. Pour $T > 0, X \in \mathbb{R}^{2n}, |t| \le T$, on définit

$$\omega(t,X) = \frac{\langle \delta_0(t,X)\rangle}{\nu(t,X)^{1/2}},\ \sigma_1(t,X) = \delta_0(t,X),$$
$$\eta(t,X) = \int_{-T}^{t} \delta_0(s,X)\Lambda^{-1/2} ds + 2T.$$

On définit $\Theta(t,X)$ par la formule

$$\Theta(t,X) =$$
$$\sup_{-T\le s\le t} \left\{ \sigma_1(s,X) - \sigma_1(t,X) + \frac{1}{2T}\int_s^t \rho_1(r,X)dr - \rho_1(s,X) \right\},$$

où ρ_1 est donné dans le lemme précédent. On définit également

$$\boxed{m(t,X) = \delta_0(t,X) + \Theta(t,X) + T^{-1}\delta_0(t,X)\eta(t,X).}$$

Lemme 7. Inégalités pour le multiplicateur. *Avec les notations ci-dessus pour* Θ, ρ_1, m, *on a pour* $T > 0$, $|t| \le T$, $X \in \mathbb{R}^{2n}, \Lambda \ge 1$,

$$|\Theta(t,X)| \le \rho_1(t,X) \le 2\frac{\langle \delta_0(t,X)\rangle}{\nu(t,X)^{1/2}}, \quad |\sigma_1(t,X)| = |\delta_0(t,X)|,$$

$$C_0^{-1}R(t,X) \le \rho_1(t,X) \le 2T\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Theta(t,X) + \sigma_1(t,X)\Big),$$

$$0 \le \eta(t,X) \le 4T, \quad \frac{d}{dt}\big(\delta_0 \eta\big) \ge \delta_0^2 \Lambda^{-1/2}, \quad |\eta'_X(t,X)| \le 4T\Lambda^{-1/2},$$

$$T\frac{d}{dt}m \ge \frac{1}{2}\rho_1 + \delta_0^2\Lambda^{-1/2} \ge \frac{1}{2C_0}R + \delta_0^2\Lambda^{-1/2} \ge \frac{1}{2^{3/2}C_0}\langle\delta_0\rangle^2\Lambda^{-1/2}.$$

avec

$$R(t,X) = \Lambda^{-1/2}\mu(t,X)^{1/2}\nu(t,X)^{-1/2}\langle\delta_0(t,X)\rangle.$$

Le lemme 7 est une conséquence directe du lemme 5. Nous allons utiliser ce $m(t,X)$ comme un multiplicateur dans notre méthode d'énergie. Les points essentiels sont

• $\partial m/\partial t$ est grand (dernière ligne d'inégalités).

• $\delta_0(t,X)q(t,X) \ge 0$: le multiplicateur respecte le sens de propagation des singularités, selon les zones forward ou backward.

• On conserve un bon contrôle de la taille de $|m(t,X)|$ par rapport au gain donné par $\partial m/\partial t$.

3.2. La quantification de Wick.

Définition. Soit $Y = (y, \eta)$ un point de $\mathbb{R}^{2n}$. L'opérateur[4] Σ_Y est $\left[2^n e^{-2\pi|\cdot - Y|^2}\right]^w$. C'est un projecteur orthogonal de rang 1: $\Sigma_Y u = (Wu)(Y)\tau_Y\varphi$ avec $(Wu)(Y) = \langle u, \tau_Y\varphi\rangle_{L^2}$, où $\varphi(x) = 2^{n/4}e^{-\pi|x|^2}$ et $(\tau_{y,\eta}\varphi)(x) = \varphi(x-y)e^{2i\pi\langle x - \frac{y}{2}, \eta\rangle}$. Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. La quantification de Wick de a est $a^{\mathrm{Wick}} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(Y)\Sigma_Y dY$.

Lemme 8. *Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Alors $a^{\mathrm{Wick}} = W^* a^\mu W$ et $1^{\mathrm{Wick}} = Id_{L^2}$ où a^μ est l'opérateur de multiplication par a dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. L'opérateur $\pi_H = WW^*$ est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé H de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. De plus* $\left\|a^{\mathrm{Wick}}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$, *et*

$$a(X) \geq 0 \textit{ pour tout } X, \textit{ implique } a^{\mathrm{Wick}} \geq 0.$$

Cet outil, assez fruste, est très pratique. Il faut bien convenir que la démonstration utilise de manière décisive cette quantification positive.

---

[4]Ici a^w désigne l'opérateur de symbole de Weyl a donné par

$$(a^w u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\xi} a(\frac{x+y}{2}, \xi)u(y)dyd\xi.$$

3.3. La méthode d'énergie. Nous considérons

$$L^* = D_t + iQ(t), \quad M(t) = m(t, X)^{\mathrm{Wick}}.$$

On calcule pour $u \in C_c^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n)), \operatorname{supp} u \subset [-T_0, T_0]$, la quantité $\langle L^* u, iMu\rangle$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\langle L^* u, iMu\rangle = \langle \dot{M}u, u\rangle + 2\operatorname{Re}\langle Qu, Mu\rangle \\ = \langle (\dot{M} + 2\operatorname{Re} MQ)u, u\rangle. \end{aligned}$$

Lemme 9. *On a*

- $\frac{d}{dt} M(t) \geq \frac{1}{2T}\rho_1(t, X)^{\mathrm{Wick}} + \frac{1}{T}(\delta_0^2)^{\mathrm{Wick}}\Lambda^{-1/2}$
$$\geq \frac{1}{2^{3/2} C_0 T}(\langle \delta_0\rangle^2)^{\mathrm{Wick}}\Lambda^{-1/2}.$$
- *Si* $q = \Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu^{1/2}\beta$ *avec* $\beta \in S(\nu^{1/2}, \nu^{-1}\Gamma)$, *et* $\delta_0 = \beta$,
$$\operatorname{Re} QM + S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu^{-1/2}, \Gamma)^w \geq 0. \quad \textit{(pts de gradient)}$$
- *Si* $q \geq 0$, $q \in S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu, \nu^{-1}\Gamma)$, $\gamma_0\nu^{1/2} \leq \delta_0 \leq \gamma_0^{-1}\nu^{1/2}$ *avec une constante* γ_0 *fixée,*
$$\operatorname{Re}(QM) + S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}, \Gamma)^w \geq 0. \quad \textit{(pts positifs)}$$

La première ligne est une conséquence immédiate de la l'avant-dernière ligne du lemme 7. Les deux autres affirmations viennent d'un argument de calcul symbolique sur les formes normales dégagées dans la classification des points.

En collectant l'information ci-dessus on trouve le

Lemme 10. *Avec* $D(t,X) = \langle \delta_0(t,X) \rangle$, *on a*

$$\frac{d}{dt}M(t) + 2\,\mathrm{Re}\big(Q(t)M(t)\big) \geq T^{-1}(D^2)^{\mathrm{Wick}}\Lambda^{-1/2}c_0,$$

où c_0 *est une constante positive.*

Vérifions que nous obtenons une estimation avec perte de 3/2 derivées pour

$$L^* = D_t + iQ(t).$$

On calcule pour $u \in C_c^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n)), \operatorname{supp} u \subset [-T_0, T_0]$, $\langle L^* u, iMu \rangle$:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\langle L^*u, iMu\rangle &= \langle \dot{M}u, u\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle Qu, Mu\rangle \\ &\geq c_0 T^{-1}\Lambda^{-1/2}\langle \big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\mathrm{Wick}}u, u\rangle. \end{aligned}$$

On obtient pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} &c_0 T^{-1}\Lambda^{-1/2}\langle \big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\mathrm{Wick}}u, u\rangle \\ &\qquad \leq \alpha^{-1}\left\|L^*u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} + \alpha \left\|Mu\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \end{aligned}$$

et utilisant les propriétés de la quantification de Wick, on obtient

$$\begin{aligned} &c_0 T^{-1}\Lambda^{-1/2}\langle \big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\mathrm{Wick}}u, u\rangle \\ &\qquad \leq \alpha^{-1}\left\|L^*u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} + \alpha C_1\langle \big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\mathrm{Wick}}u, u\rangle. \end{aligned}$$

Dans

$$c_0 T^{-1}\Lambda^{-1/2}\langle\big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\text{Wick}}u,u\rangle \\ \le \alpha^{-1}\left\|L^*u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}+\alpha C_1\langle\big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\text{Wick}}u,u\rangle,$$

on choisit $\alpha=\frac{c_0}{2C_1T\Lambda^{1/2}}$, pour obtenir

$$(\flat)\quad \frac{1}{2}c_0T^{-1}\Lambda^{-1/2}\langle\big(1+\delta_0^2(t,\cdot)\big)^{\text{Wick}}u,u\rangle \\ \le \frac{2C_1T}{c_0}\Lambda^{1/2}\left\|L^*u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

et donc avec une constante positive fixée c_1,

$$\left\|L^*u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\ge c_1^2T^{-2}\Lambda^{-1}\left\|u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})},$$

ce qui donne

$$\left\|L^*u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}\ge c_1T^{-1}\Lambda^{-1/2}\left\|u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})},$$

qui est bien une estimation avec perte de 3/2 derivées par rapport à l'estimation elliptique $\|Lu\|\gtrsim\Lambda\|u\|$.

On peut remarquer que dans la région où $\langle\delta_0\rangle\sim\Lambda^{1/2}$, l'estimation $(\flat)$ perd seulement une dérivée et est une estimation L^2-L^2.

Conclusion

• **Quelle est la perte minimale de dérivées qui soit conséquence de la condition** (ψ)**?** La perte de 3/2 dérivées semble optimale eu égard à la méthode d'énergie utilisée qui revient à démontrer une inégalité du type

$$\partial_t M + \mathrm{Re}(MQ) \geq I$$

en prouvant deux inégalités, $\partial_t M \gg I$ et $\mathrm{Re}\, MQ \gtrsim -I$. Limiter la perte à un nombre $< 3/2$ est sans doute possible mais requerrait un changement drastique de méthode.

• **L'analyticité du symbole suffit-elle à assurer une perte d'une dérivée sous la condition** (ψ)**?** La réponse est sans doute oui. Les contre-exemples connus sont effectivement C^∞ sans être analytiques.

• **En supposant** (ψ)**, peut-on trouver des solutions locales** $u \in C^\infty$ **de l'équation** $Pu = f$ **si** $f \in C^\infty$**?** C'est vrai sous l'hypothèse $(P) = (\psi) \cap (\overline{\psi})$, mais la démonstration repose sur une étude détaillée de la propagation des singularités, étude qui semble peu abordable dans le cas (ψ).

• **Y-a-t-il une condition géométrique** $(\psi)^\sharp$ **renforçant** (ψ) **et assurant la résolubilité locale avec perte d'une dérivée?**

• **Pseudo-spectre et condition** (ψ)**.** L'étude des opérateurs non autoadjoints (comme le sont les opérateurs pseudodifférentiels à symbole complexe) montre une grande instabilité spectrale des opérateurs non normaux. En particulier le résolvant $(P-z)^{-1}$ peut avoir une norme très grande loin du spectre, et le spectre d'une petite perturbation $P+\epsilon R$ peut être très loin du spectre de P. Ce type de phénomène est connu depuis des lustres par les numériciens qui s'occupent de grandes matrices non autoadjointes. Plus récemment, à la suite de travaux de L.S.Boulton, E.B.Davies, L.N.Trefethen sur l'oscillateur harmonique complexe $-\partial_{\mathbf{t}}^{\mathbf{2}}+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{t}^{\mathbf{2}}$, plusieurs auteurs (N.Dencker, M.Hager, K.Pravda-Starov, J.Sjöstrand, M.Zworski, ...) ont entrepris une étude systématique des opérateurs semiclassiques non autoadjoints. La condition $(\overline{\psi})$ pour $p(x,\xi)-z$ joue un rôle important: violée, elle assure l'existence d'un quasi-mode

$$(P-z)u_h = O(h^\infty).$$

Vérifiée et agrémentée de conditions globales (?), elle devrait permettre de démontrer des estimations

$$\|(P-z)u\|_{L^2} \geq h^\mu \|u\|_{L^2}.$$