Exercices corrigés pour le cours de Licence de Mathématiques

Intégration 1

INTEGRATION, Feuille d'exercices 1

Exercice 1.1.
Soit $f : X \to Y$ une application.
a. Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y,

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

b. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X, $\quad f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
c. Montrer que si f est injective, $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Montrer par un contre-exemple que l'égalité précédente est fausse en général.
Corrigé. a. L'assertion $x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ signifie $f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$ qui équivaut à

$$\exists i \in I,\ f(x) \in B_i \Longleftrightarrow \exists i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Longleftrightarrow\ x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

De même, $x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ signifie $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$, qui équivaut à

$$\forall i \in I,\ f(x) \in B_i \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Longleftrightarrow\ x \in \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

b. L'assertion $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ signifie $\exists x \in \cup_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$, i.e.

$$\exists i \in I, \exists x \in A_i, y = f(x) \Longleftrightarrow \exists i \in I, y \in f(A_i) \Longleftrightarrow\ y \in \cup_{i\in I} f(A_i).$$

c. Remarquons que $A \subset A' \subset X \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$. Pour tout $j \in I$, on a donc $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset f(A_j)$ et par suite $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Si $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, alors

$$\forall i \in I, \exists x_i \in A_i, \quad y = f(x_i),$$

ce qui implique que pour $i, j \in I$, $f(x_i) = f(x_j)$. L'injectivité de f donne par conséquent pour $i, j \in I$, $x_i = x_j$, et donc $y = f(x)$ avec $x \in \cap_{i\in I} A_i$, qed. Considérons l'application

$$f : \{0, 1\} \longrightarrow \{1\}, \quad f(0) = f(1) = 1,$$

et posons $A_i = \{i\}$. On a $f(A_0 \cap A_1) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq f(A_0) \cap f(A_1) = \{1\}$.
Commentaire. On peut remarquer que, réciproquement, si la propriété est vérifiée, alors f est injective. En effet si $x_1 \neq x_2$ sont éléments de X, comme

$$\emptyset = f(\emptyset) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\}$$

on obtient $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exercice 1.2.
Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(X)$. On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour $f : X \to \mathcal{P}(X)$ l'ensemble $A = \{x \in X, x \notin f(x)\}$.
Corrigé. Suivons l'indication. Si f était surjective, nous pourrions trouver $a \in X$ tel que

$$A = f(a).$$

Supposons d'abord $a \in A$; on obtient $a \in f(a)$ et par conséquent $a \notin A$, ce qui contredit notre hypothèse. Supposons maintenant que $a \notin A$; on obtient $a \notin f(a)$ et par conséquent $a \in A$, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, l'élément a n'appartient ni à A, ni à son complémentaire, ce qui est impossible. Par suite, A ne possède pas d'antécédent par f, qui est donc non surjective.
Commentaire. Nous avons démontré beaucoup plus que ce qui était demandé: si f est une application de X dans $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble A n'est pas dans l'image de f. Cet exemple est une version mathématique du paradoxe du menteur, connu depuis l'antiquité[1]: l'homme qui dit "je mens" dit-il la vérité ? Si c'est le cas, alors il ment et donc, ne dit pas la vérité. Si en revanche il ment, c'est qu'il a dit vrai ...
Si l'on revient aux mathématiques, on s'aperçoit qu'une conséquence de ce qui précède est le célèbre paradoxe de Russell:[2] "il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles". En effet si un tel "univers" X existait, il contiendrait l'ensemble de ses parties et cette inclusion $\mathcal{P}(X) \subset X$ permettrait de construire une surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$. On pourrait également considérer

$$Y = \{x \in X, x \notin x\},$$

et remarquer que si $Y \in Y$ alors, par définition de Y, $Y \notin Y$. Si en revanche $Y \notin Y$ alors, par définition de Y, $Y \in Y$. Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction. Ceci exclut l'existence d'un ensemble de tous les ensembles.

---

[1]La première version du paradoxe du menteur est attribuée à Eubulide, philosophe grec du IVe siècle avant J.C.
[2]Bertrand Russell (1872–1970) est un logicien britannique, auteur d'un monumental traité de logique mathématique, *Principia Mathematica*, écrit en commun avec A.N.Whitehead (1861–1947) entre 1910 et 1913, au plus fort de la crise des fondements des mathématiques, crise apparue en 1902 avec le paradoxe sus-mentionné. En 1895, le mathématicien Georg Cantor (1845–1918) avait créé la théorie des ensembles, "un paradis dont personne ne doit pouvoir nous expulser" selon le mot de David Hilbert. Sept années plus tard, il fallait se rendre à l'évidence: de sérieuses difficultés apparaissaient dans la théorie de Cantor, en particulier dans la notion même d'ensemble. Russell était un personnage vraiment extraordinaire : prix Nobel de littérature en 1950, il a passé la dernière partie de son existence à combattre la production d'armes nucléaires et l'influence du *Tribunal Russell* sur la vie politique internationale fut considérable. Pour plus d'informations sur B.Russell, renvoyons aux sites
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Russell.html
http://www.nobel.se/literature/laureates/1950
Pour une documentation plus appronfondie sur le paradoxe du menteur, on pourra consulter
http://www.utm.edu/research/iep/p/par-liar.htm
qui contient également une remarquable bibliographie. Les sites francophones sur le sujet sont dans l'ensemble, soit éloignés des mathématiques, soit uniquement récréatifs.

De manière plus prosaïque, notons que la propriété de l'exercice 1.2 est une évidence pour les ensembles finis car, dans ce cas,

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{Card} X}$$

et on voit facilement que, pour $n \geq 0$ entier, on a $n < 2^n$; on peut par exemple démontrer par récurrence sur n que $n+1 \leq 2^n$.

Exercice 1.3.
Soit X un ensemble. On appelle partition de X toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties non vides de X, deux à deux disjointes, de réunion X. Etant donnée une partition de X, montrer que la relation $x \mathcal{R} y$ définie par il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ est une relation d'équivalence sur X. Montrer que toute relation d'équivalence sur X peut s'obtenir de cette manière. Décrire les partitions de $\mathbb{Z}$ associées aux congruences modulo n.

Corrigé. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive car $X = \cup_{i \in I} A_i$: si $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et donc $x \mathcal{R} x$. La symétrie de $\mathcal{R}$ est inscrite dans sa définition, où x et y jouent le même rôle. Soient $x, y, z \in X$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Alors, il existe $i, j \in I$ tels que

$$x, y \in A_i, \quad y, z \in A_j.$$

Comme les A_i sont deux à deux disjoints et $y \in A_i \cap A_j$, il vient $A_i = A_j$ et $x \mathcal{R} z$ (transitivité de la relation).
Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X, on peut considérer, *l'ensemble quotient* $\mathcal{Q}$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence. On a $\mathcal{Q} = \{C_j\}_{j \in J}$. Aucune des classes d'équivalence n'est vide car C_j est par définition la classe d'équivalence d'un élément de X. Par ailleurs

$$X = \cup_{j \in J} C_j$$

car si $x \in X$, la classe d'équivalence de x est l'un des C_j qui contient donc x. Deux classes distinctes sont disjointes car si $x_j \in C_j$, $x_k \in C_k$, avec $x_j \neq x_k$ et $z \in C_j \cap C_k$, on a

$$x_j \mathcal{R} z \text{ et } z \mathcal{R} x_k \Longrightarrow x_j \mathcal{R} x_k \Longrightarrow C_j = C_k.$$

Soit n un entier ≥ 2. La congruence modulo n est la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ donnée par

$$x \equiv y \quad (n) \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z} \Longleftrightarrow n|(x-y), \quad \text{i.e. } n \text{ divise } x - y.$$

C'est évidemment une relation d'équivalence, et l'ensemble quotient est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La partition de $\mathbb{Z}$ associée à cette relation est la famille à n éléments

$$A_r = r + n\mathbb{Z} = \{r + nq\}_{q \in \mathbb{Z}}, \quad 0 \leq r \leq n-1.$$

Remarquons que la division euclidienne permet de démontrer ce fait: si m est un entier, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que

$$m = nq + r, \quad 0 \leq r \leq n-1.$$

Commentaire. La relation d'équivalence précédente est compatible avec la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$, i.e. si $P_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associe à un entier sa classe d'équivalence modulo n, alors on peut définir addition et multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$P_n(a) \oplus P_n(b) = P_n(a+b), \quad P_n(a) \otimes P_n(b) = P_n(ab)$$

et on vérifie facilement que si $a \equiv a' \quad (n), \qquad b \equiv b' \quad (n)$, les résultats sont inchangés. Le lecteur, certainement familier avec ces objets, pourra écrire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $2 \leq n \leq 11$, vérifier que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier, chercher les diviseurs de 0 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \{4, 6, 8, 9, 10\}$ et ... lire un petit livre d'arithmétique comme par exemple [Apo].

Exercice 1.4.
Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Montrer que A est équipotent à $\mathbb{N}$. Montrer qu'un ensemble X est dénombrable s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$.

Corrigé. Comme A est infini, il est non vide, et comme $\mathbb{N}$ est bien ordonné, A possède un plus petit élément a_1. Supposons construits pour n entier ≥ 1

$$a_1 < \cdots < a_n, \quad \text{tels que } a_j = \min\bigl(A \backslash \{a_k\}_{1 \leq k \leq j-1}\bigr).$$

Comme A est infini, $A \backslash \{a_k\}_{1 \leq k \leq n}$ est non vide et l'on peut poser

$$a_{n+1} = \min\bigl(A \backslash \{a_k\}_{1 \leq k \leq n}\bigr).$$

On dispose donc d'une suite strictement croissante $(a_j)_{j \geq 1}$ d'éléments de A. Soit $x \in A$. Par définition de a_1, on a $a_1 \leq x$. L'ensemble $\{j \in \mathbb{N}, j \geq 1, a_j \leq x\}$ est donc un sous-ensemble majoré non vide d'entiers: c'est un ensemble fini et il possède donc un plus grand élément m. On a donc, pour un entier $m \geq 1$

$$a_1 < \cdots < a_m \leq x < a_{m+1}.$$

Or, par définition, on a $a_{m+1} = \min\bigl(A \backslash \{a_k\}_{1 \leq k \leq m}\bigr)$. Ceci implique $x = a_m$; sinon, on aurait $a_m < x < a_{m+1}$ et $x \in A \backslash \{a_k\}_{1 \leq k \leq m}$ d'où $a_{m+1} \leq x < a_{m+1}$, ce qui est impossible. Nous avons démontré que $A = \{a_j\}_{j \geq 1}$ et donc A est équipotent à $\mathbb{N}$.

Considérons un ensemble X dénombrable, i.e. équipotent à une partie de $\mathbb{N}$. Soit X est fini et il y a une injection de X dans $\mathbb{N}$, soit X est infini et est équipotent à une partie A de $\mathbb{N}$, elle-même infinie dont nous venons de voir qu'elle est équipotente à $\mathbb{N}$.

Commentaire. La notion d'ensemble bien ordonné joue un rôle important dans la démonstration précédente. Un ensemble E muni d'une relation d'ordre (relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive) est dit *bien ordonné* si toute partie non vide possède un plus petit élément. C'est le cas de $\mathbb{N}$, muni de la relation d'ordre habituelle. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas minoré. En revanche, toute partie minorée de $\mathbb{Z}$ est bien ordonnée. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{Q}_+$: l'ensemble minoré $\{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ ne possède pas de plus petit élément. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}_+$: l'ensemble minoré $]0, 1]$ ne possède pas de plus petit élément. Toutefois, dans les exemples précédents, l'ordre est *total*, i.e. deux éléments x, y sont toujours comparables (on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$). Un bon ordre est toujours total (considérer l'ensemble $\{x, y\}$) et nous venons de voir que la réciproque est fausse en général. Par ailleurs un exemple simple et naturel d'ordre non total est donné par la relation suivante sur l'ensemble des matrices 2×2 symétriques (à coefficients réels):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{signifie} \quad (a_2 - a_1)(c_2 - c_1) \geq (b_2 - b_1)^2 \text{ et } a_2 + c_2 \geq a_1 + c_1.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre et que les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas comparables.

Exercice 1.5.
Soit $a \leq b$ des réels et $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que pour tout x de $[a, b]$, la suite $f_n(x)$ tend vers 0 en décroissant. Montrer que la suite f_n converge uniformément vers 0 (lemme de Dini[3]). Montrer que si g_n est une suite de fonctions continues positives sur $[a, b]$ qui tend simplement en croissant vers une fonction continue g, alors $\int_a^b g_n(t)dt \to \int_a^b g(t)dt$.
Corrigé. Il s'agit d'un exercice classique d'analyse. Raisonnons par l'absurde en niant la convergence uniforme de la suite f_n. La suite numérique $\omega_n = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)|$ ne tend pas vers 0 et il existe $\epsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(\omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tels que, pour tout k, on ait $\omega_{n_k} > \epsilon_0$. Par conséquent, pour tout k, il existe $x_k \in [a, b]$ tel que

$$f_{n_k}(x_k) > \epsilon_0.$$

Grâce à la compacité de $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $c \in [a, b]$. Pour simplifier les notations, supposons que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers c. Puisque pour $l \geq 0$, on a $n_{k+l} > n_k$, il vient

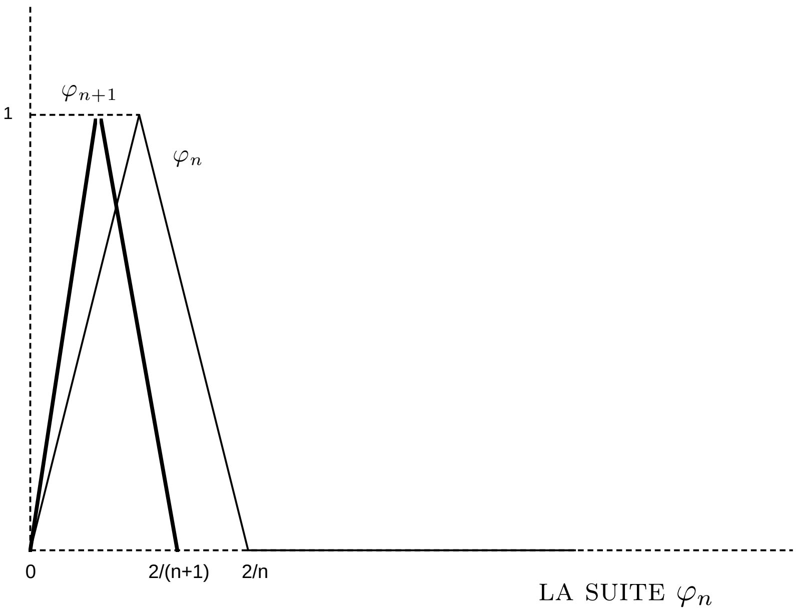
$$f_{n_k}(x_{k+l}) \geq f_{n_{k+l}}(x_{k+l}) > \epsilon_0.$$

Par continuité de la fonction f_{n_k}, on trouve $f_{n_k}(c) \geq \epsilon_0 > 0$, ce qui contredit la convergence vers 0 de la suite $f_n(c)$. Pour le dernier point, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $g - g_n$ et d'utiliser la majoration triviale

$$0 \leq \int_a^b \big(g(t) - g_n(t)\big)dt \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |(g - g_n)(x)|.$$

---

[3]Ulisse Dini (1845-1918) est un mathématicien italien. On peut voir sa statue près de la Piazza dei Cavalieri, à Pise, près de la Scuola Normale Superiore dont il fut le directeur.

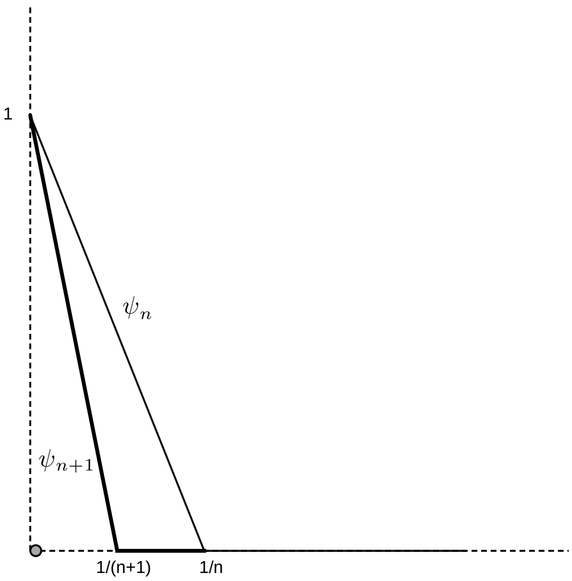


LA SUITE φ_n

Commentaire. Le résultat est incorrect sans l'hypothèse de monotonie décroissante: prenez φ_n affine par morceaux sur $[0,1]$, $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1/n) = 1$, $\varphi_n(t) = 0$ pour $t \geq 2/n$. La suite de fonctions continues φ_n tend simplement vers 0, pas uniformément car $\sup |\varphi_n| = 1$. De plus le résultat est incorrect sans l'hypothèse de continuité: considérez ψ_n définie sur [0,1] par

$$\psi_n(0) = 0 = \psi_n(t) \text{ pour } t \geq 1/n, \quad \psi_n(t) = 1 - nt \text{ pour } 0 < t < 1/n.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, la suite $\big(\psi_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, néanmoins la convergence n'est pas uniforme car $\sup_{[0,1]} |\psi_n| = 1$.



LA SUITE ψ_n

Exercice 1.6.
On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues définies sur [0,1] à valeurs réelles.
a. Montrer que E est complet pour la norme donnée par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
b. Montrer que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ définit une norme sur E. Montrer que cette norme n'est pas équivalente à la précédente. Montrer que E muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.
Corrigé. Le *(a)* est un résultat classique dont nous donnons tout de même la preuve complète. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|_\infty)$. Comme pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est convergente. Posons $f(x) = \lim_n f_n(x)$. On a

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{n\geq m} \|f_n - f_m\|_\infty = \epsilon(m).$$

Comme la suite f_n est de Cauchy, $\lim_m \epsilon(m) = 0$ et f est limite uniforme des f_n. De plus, pour $x, x_0 \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

et donc

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(x_0)|,$$

ce qui implique par continuité de f_n

$$\limsup_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_n\|_\infty, \quad \text{ceci pour tout } n,$$

d'où $\limsup_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_n 2\|f - f_n\|_\infty = 0$, ce qui donne la continuité de f.
(b) Si $f \in E$, et f non identiquement nulle, il existe $r > 0$ tel que l'ouvert $\{x, |f(x)| > r\}$ soit non vide. Cet ouvert contient donc un intervalle $[a,b]$ avec $0 \leq a < b \leq 1$ et par suite

$$\|f\|_1 \geq (b-a)r > 0.$$

Les autres propriétés des normes (positivité, homogénéité, inégalité triangulaire) sont immédiates. Pour $f \in E$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En revanche, il n'existe pas de constante C telle que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$. Sinon en considérant la fonction φ_n de l'exercice 1.5, on aurait, pour tout entier n

$$1 = \|\varphi_n\|_\infty \leq C\|\varphi_n\|_1 = C/n,$$

ce qui est impossible. De plus, la suite Φ_n définie par

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nx - \frac{n}{2} + 1 & \text{pour } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

est de Cauchy pour $\|\|_1$: comme Φ_n est à valeurs dans $[0,1]$, on a

$$\|\Phi_{n+k} - \Phi_n\|_1 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |\Phi_{n+k}(x) - \Phi_n(x)|dx \leq 1/n.$$

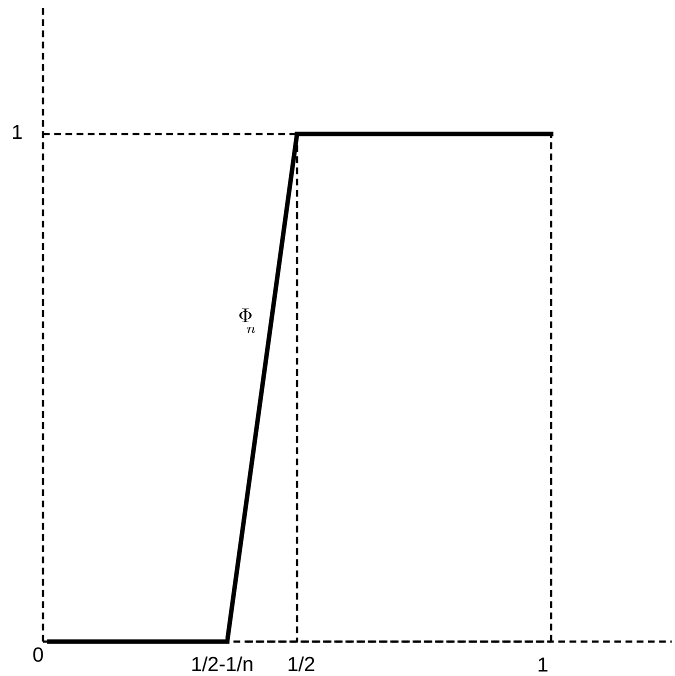
Néanmoins, il n'existe pas de fonction $\Phi \in E$ telle que $\lim_n \|\Phi_n - \Phi\|_1 = 0$; en effet, sinon

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |\Phi(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|dx \leq \|\Phi_n - \Phi\|_1 ,$$
$$0 \leq \int_{1/2}^{1} |\Phi(x) - 1|dx = \int_{1/2}^{1} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|dx \leq \|\Phi_n - \Phi\|_1 .$$

La seconde inégalité implique que $\Phi = 1$ sur [1/2,1] tandis que la première implique, pour $\epsilon > 0$ et $n > 1/\epsilon$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |\Phi(x)|dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |\Phi(x)|dx \leq \|\Phi_n - \Phi\|_1 ,$$

et donc $\Phi = 0$ sur [0,1/2[. Ceci est incompatible avec la continuité de Φ en $1/2$.



LA SUITE Φ_n

Exercice 1.7.
a. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge.
b. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge.
c. Montrer que la série harmonique (terme général $1/n$) diverge. Montrer que la suite donnée par

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n$$

est convergente (ln désigne le logarithme népérien).
d. Montrer que, au sens des intégrales de Riemann impropres, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe.
e. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$.
Corrigé. Pour *(a)*, $\alpha < 1$; pour *(b)*, $\alpha > 1$. Pour *(c)*, on écrit

$$x_n = \sum_{1 \le k \le n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{1 \le k \le n} \int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt + \ln\bigl(1 + \frac{1}{n}\bigr).$$

Comme pour $1 \le k$, on a

$$0 \le \int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt \le \int_k^{k+1} \frac{1}{kt} dt \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2},$$

la série de terme général $\int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt$ est convergente. Comme $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + 1/n) = 0$, la suite x_n est convergente. Ceci implique que la série harmonique, égale à $x_n + \ln n$, diverge en tendant vers $+\infty$.
(d) La fonction $\sin x/x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (et vaut 1 en 0). On examine, pour $A \ge \pi/2$,

$$I(A) = \int_{\pi/2}^{A} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{\pi/2}^{A} - \int_{\pi/2}^{A} \frac{\cos t}{t^2} dt = -A^{-1} \cos A - \int_{\pi/2}^{A} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Comme $|\cos A| \le 1$ et $|t^{-2} \cos t| \le t^{-2}$, le terme de droite converge pour $A \to +\infty$.
(e) On a, pour $A \ge 1$

$$\ln A = \int_1^A \frac{dx}{x} = \int_1^A \frac{\cos(2x)}{x} dx + \int_1^A \frac{2\sin^2 x}{x} dx \le \int_1^A \frac{\cos(2x)}{x} dx + 2\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx,$$

et le membre de droite tend vers $+\infty$ avec A. Comme on peut démontrer comme en *(d)* que $\int_1^A x^{-1}\cos(2x) dx$ possède une limite lorsque $A \to +\infty$, on trouve le résultat.
Commentaire. La limite de la suite (x_n) du *(c)* est connue sour le nom de constante d'Euler, et notée γ. Une valeur approchée est

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488486772677766467093694706

Cette constante reste assez mystérieuse; par exemple, on ne sait pas si elle est irrationnelle. Pour plus de détails, mathématiques et anecdotiques, on pourra consulter le site http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html

Exercice 1.8.
Montrer que l'ensemble des nombres réels est équipotent à celui des parties de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser les développements dyadiques). Montrer que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Corrigé. D'après l'exercice 1.2, cela implique que $\mathbb{R}$ ne peut être équipotent à $\mathbb{N}$. Par suite, $\mathbb{R}$ ne peut être dénombrable, sinon il serait équipotent à une partie de $\mathbb{N}$, nécessairement infinie, et donc, d'après l'exercice 1.4, serait équipotent à $\mathbb{N}$.
L'application $x \mapsto x/(1+|x|)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ qui est en bijection avec $]0,1[$. De plus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, qui désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$; en effet, on considère, pour un ensemble X

$$\begin{array}{rcl}\Phi : \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A\end{array}, \quad \text{où } \mathbf{1}_A : X \to \{0,1\} \text{ est défini par } \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

L'application Φ est une bijection : comme $A = \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\})$, $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ implique $A = B$. Par ailleurs, si $\varphi : X \to \{0,1\}$, on a $\varphi = \mathbf{1}_A$ avec $A = \varphi^{-1}(\{1\})$. Il nous reste donc à démontrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. Posons, pour $k \geq 1$ entier, $x_k = E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x) = p_k(x)$, où $E(t)$ désigne la partie entière de t caractérisée par $E(t) \in \mathbb{Z}$ et $E(t) \leq t < E(t) + 1$, i.e.

$$E(t) = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq t\} = \min\{n \in \mathbb{Z}, t < n+1\}.$$

On a

$$\begin{gathered} E(2^k x) \leq 2^k x < E(2^k x) + 1 \\ E(2^{k-1}x) \leq 2^{k-1}x < E(2^{k-1}x) + 1 \end{gathered}$$

et par conséquent $2E(2^{k-1}x) \leq 2^k x < 2E(2^{k-1}x) + 2$ ce qui implique

$$2E(2^{k-1}x) \leq E(2^k x) \leq 2^k x < E(2^k x) + 1 \leq 2E(2^{k-1}x) + 2.$$

Il vient

$$0 \leq x_k = p_k(x) = E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x) < E(2^k x) + 1 - 2E(2^{k-1}x) \leq 2,$$

et comme x_k est un entier tel que $0 \leq x_k < 2$, on trouve que $x_k \in \{0,1\}$. La série $\sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{2^k}$ est donc convergente. On remarque que, pour $n \geq 1$ entier,

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{x_k}{2^k} &= \sum_{1\leq k\leq n} \frac{E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x)}{2^k} = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{E(2^k x)}{2^k} - \sum_{1\leq k\leq n} \frac{E(2^{k-1}x)}{2^{k-1}} \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} \frac{E(2^k x)}{2^k} - \sum_{0\leq k\leq n-1} \frac{E(2^k x)}{2^k} = \frac{E(2^n x)}{2^n} - E(x) = 2^{-n}E(2^n x). \end{aligned}$$

Or on a vu que $2^{-n}E(2^nx) \leq x < 2^{-n}E(2^nx)+2^{-n}$, ce qui implique que $\lim_n 2^{-n}E(2^nx) = x$ et donc

$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{2^k}$$

avec $x_k \in \{0,1\}$. Nous avons donc construit une application (développement dyadique par défaut)

$$\begin{array}{rcc} \Psi :]0,1[& \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & \big(x_k = p_k(x)\big)_{k\geq 1} \end{array}.$$

Cette application est injective car si $x, y \in]0,1[$ vérifient pour tout $k \geq 1$, $x_k = y_k$, alors $x = \sum_{k\geq 1} x_k 2^{-k} = \sum_{k\geq 1} y_k 2^{-k} = y$. L'application Ψ n'est pas surjective (e.g. la suite nulle n'a pas d'antécédent), néanmoins nous allons voir que le complémentaire de l'image de Ψ est dénombrable. Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite de 0,1 qui n'est ni identiquement nulle, ni identiquement égale à 1 à partir d'un certain rang. Posons

$$X = \sum_{k\geq 1} x_k 2^{-k}.$$

On a $0 < X < \sum_{k\geq 1} 2^{-k} = 1$. Alors

$$\frac{x_1}{2} \leq X \leq \frac{x_1}{2} + \sum_{k\geq 2} \frac{x_k}{2^k} < \frac{x_1}{2} + \sum_{k\geq 2} 2^{-k} = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2},$$

et par suite $x_1 \leq 2X < x_1 + 1$ et par conséquent $E(2X) = x_1$ et $x_1 = p_1(X)$. On démontre de même que

$$p_k(X) = E(2^kX) - 2E(2^{k-1}X) = x_k.$$

En effet, supposons que pour un entier $n \geq 1$, on ait, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k = p_k(X)$. Alors,

$$\sum_{1\leq k\leq n+1} x_k 2^{-k} \leq X < \sum_{1\leq k\leq n+1} x_k 2^{-k} + \sum_{n+2\leq k} 2^{-k} = \sum_{1\leq k\leq n+1} x_k 2^{-k} + 2^{-n-1},$$

ce qui implique

$$\sum_{1\leq k\leq n} p_k(X) 2^{-k} + x_{n+1} 2^{-n-1} \leq X < \sum_{1\leq k\leq n} p_k(X) 2^{-k} + x_{n+1} 2^{-n-1} + 2^{-n-1}$$

i.e.

$$2^{-n}E(2^nX) + x_{n+1}2^{-n-1} \leq X < 2^{-n}E(2^nX) + x_{n+1}2^{-n-1} + 2^{-n-1}$$

i.e.

$$2E(2^nX) + x_{n+1} \leq 2^{n+1}X < 2E(2^nX) + x_{n+1} + 1$$

i.e.

$$x_{n+1} \leq 2^{n+1}X - 2E(2^nX) < x_{n+1} + 1.$$

Il vient

$$x_{n+1} = E\big(2^{n+1}X - 2E(2^nX)\big) = E(2^{n+1}X) - 2E(2^nX) = p_{n+1}(X), \text{ qed.}$$

Par suite, l'application Ψ est injective et son image contient toutes les suites $(x_k)_{k\geq 1}$ qui ne sont ni identiquement nulle ni composées uniquement de 1 à partir d'un certain rang. Par conséquent, Ψ est bijective de $]0,1[$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash\mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est un ensemble dénombrable. Montrons pour terminer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash\mathcal{D}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On a, pour $\mathcal{C}$ équipotent à $\mathbb{N}$ disjoint de $\mathcal{D}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (ce qui existe car $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable)

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash\mathcal{D}\big)\cup\mathcal{D} = \big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash(\mathcal{D}\cup\mathcal{C})\big)\cup\big(\mathcal{D}\cup\mathcal{C}\big).$$

Or $\mathcal{D}\cup\mathcal{C}$ est dénombrable infini donc équipotent à $\mathbb{N}$ et à $\mathcal{C}$. Par suite $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash(\mathcal{D}\cup\mathcal{C})\big)\cup\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash\mathcal{D}$, qed.
Commentaire. Cet exercice peut être un peu simplifié par le théorème de Schröder--Bernstein du problème 1.1 ci-dessous. Néanmoins, ce théorème est beaucoup plus difficile, puisqu'il traite d'une situation très générale. Il nous a semblé plus simple de donner une preuve de l'exercice 1.8 indépendante du problème 1.1. Si X, Y sont des ensembles, on dira que $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y$ si X et Y sont équipotents, ceci sans définir chacun des termes $\operatorname{Card} X, \operatorname{Card} Y$. On note habituellement par $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$: on écrira que $\operatorname{Card} E = \aleph_0$ si E est équipotent à $\mathbb{N}$. Le fait que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ soit équipotent à $\mathbb{N}$ peut s'écrire symboliquement comme

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Noter également que si c désigne le cardinal de $\mathbb{R}$, nous avons démontré que

$$c = 2^{\aleph_0}.$$

On a vu aussi que $2\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad c + \aleph_0 = c$. On peut également démontrer que

$$c^2 = c.c = (2^{\aleph_0})^2 = 2^{2\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c.$$

L'identité $x^2 = x$ est vérifiée pour tous les cardinaux infinis, mais sa démonstration générale requiert l'utilisation du théorème de Zorn et n'est pas élémentaire. Les exercices 1.2-4-8 constituent une petite introduction à l'algèbre sur les cardinaux. Le lecteur plus curieux pourra consulter le premier volume du traité de Bourbaki [Bou] ainsi que d'autres sources comme par exemple

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html

Exercice 1.9.
a. Soit X un ensemble et $A_1,\dots,A_n$ une partition finie de X. Décrire la tribu engendrée par $A_1,\dots,A_n$. Quel est son nombre d'éléments ?
b. Soit X un ensemble et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de X. Décrire la tribu engendrée par $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elle est équipotente à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Corrigé. a. Considérons $\mathcal{T} = \{\cup_{j\in J} A_j\}_{J\subset\{1,\dots,n\}}$. Pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $A_j \in \mathcal{T}$ et toute tribu à laquelle les A_j appartiennent doit contenir $\mathcal{T}$; de plus $\mathcal{T}$ est une tribu, car stable par réunion, passage au complémentaire car les A_j forment une partition de X et donc

$$\big(\cup_{j\in J} A_j\big)^c = \cup_{j\in J^c} A_j.$$

En outre $X = \cup_{1\le j\le n} A_j \in \mathcal{T}$. Comme les A_j forment une partition de X, il y a une bijection entre les sous-ensembles J de $\{1,\dots,n\}$ et $\mathcal{T}$. Par suite $\operatorname{Card}\mathcal{T} = 2^n$.
b. Considérons $\mathcal{T} = \{\cup_{j\in J} A_j\}_{J\subset\mathbb{N}}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{T}$ et toute tribu à laquelle les A_j appartiennent doit contenir $\mathcal{T}$; de plus $\mathcal{T}$ est une tribu, car stable par réunion, passage au complémentaire car les A_j forment une partition de X et donc

$$\big(\cup_{j\in J} A_j\big)^c = \cup_{j\in J^c} A_j.$$

En outre $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{T}$. Comme les A_j forment une partition de X, il y a une bijection entre les sous-ensembles J de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{T}$: l'application

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni J \mapsto \cup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$$

est surjective par construction de $\mathcal{T}$. Elle est injective car si J, K sont des parties de $\mathbb{N}$ telles que

$$\cup_{j\in J} A_j = \cup_{k\in K} A_k$$

on obtient pour $j_0 \in J$, $A_{j_0} = A_{j_0} \cap \big(\cup_{j\in J} A_j\big) = A_{j_0} \cap \big(\cup_{k\in K} A_k\big) = \emptyset$ si $j_0 \notin K$. Comme $A_{j_0} \neq \emptyset$, il vient $J \subset K$ et de même $K \subset J$ i.e. $J = K$. Par suite, on peut écrire symboliquement que $\operatorname{Card}\mathcal{T} = 2^{\aleph_0}$, car nous avons démontré que $\mathcal{T}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.10.
Soit X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu dénombrable sur X.
a. Montrer que pour tout $x \in X$, l'intersection $A(x)$ des éléments de $\mathcal{M}$ qui contiennent x est encore élément de $\mathcal{M}$.
b. Montrer que pour $x, x' \in X$, soit $A(x) \cap A(x') = \emptyset$, soit $A(x) = A(x')$.
c. Montrer que $\mathcal{M}$ est la tribu engendrée par une partition dénombrable. En déduire en utilisant l'exercice précédent que $\mathcal{M}$ est finie.

Corrigé. a. $A(x)$ est une intersection dénombrable (car $\mathcal{M}$ est dénombrable) d'éléments de $\mathcal{M}$, et donc est élément de $\mathcal{M}$.
b. Considérons x, x' des éléments de X. Si $x \in A(x')$, on a $A(x) \subset A(x')$ et donc $A(x) = A(x') \cap A(x)$. Par conséquent si $x \in A(x')$ et $x' \in A(x)$, on obtient

$$A(x) = A(x') \cap A(x) = A(x').$$

Si $x \notin A(x')$ alors $A(x')^c$ est un élément de $\mathcal{M}$ qui contient x et par suite $A(x) \subset A(x')^c$, ce qui implique $A(x) \cap A(x') = \emptyset$ (et le même résultat si $x' \notin A(x)$).

c. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{B \subset X, \exists x \in X, B = A(x)\} :$$

c'est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ et il est donc dénombrable. Par ailleurs, d'après la question *b*, si $B \neq B' \in \mathcal{N}$, on a $B \cap B' = \emptyset$. En notant, avec D dénombrable, $\mathcal{N} = \{B_k\}_{k \in D}$, on trouve que $\mathcal{N}$ est une partition de X. En effet, si $X \neq \emptyset$ (si $X = \emptyset, \mathcal{M} = \{\emptyset\}$) aucun B_k n'est vide, $B_k \cap B_l = \emptyset$ pour $k \neq l \in D$ et $\cup_{k \in D} B_k = X$ car pour $x \in X$, il existe $k \in D$, tel que $A(x) = B_k$. La tribu $\mathcal{M}$ contient donc la tribu engendrée par $\mathcal{N}$, qui est non dénombrable si D est infini d'après l'exercice 1.9. Par suite, D est fini ainsi que la tribu engendrée par $\mathcal{N}$. De plus si $C \in \mathcal{M}$, on a

$$C = \cup_{x \in C} A(x)$$

car, pour $x \in C$, $C \supset A(x)$ et $x \in A(x)$; par conséquent, C est réunion, nécessairement dénombrable, d'éléments de $\mathcal{N}$. La tribu $\mathcal{M}$ est donc la tribu engendrée par $\mathcal{N}$, qui est finie.

Exercice 1.11.
Montrer que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles du type $[a, +\infty[$. Même question avec les intervalles du type $]a, +\infty[$. Même question avec les intervalles du type $]-\infty, a]$ et ceux du type $]-\infty, a[$.

Corrigé. cf. notes de cours, section 1.2, après le lemme 1.2.4.

Exercice 1.12.
Soit $(a_{ij})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$ une suite double d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer directement que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} \Big) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij} \Big).$$

Corrigé. cf. notes de cours, section 1.2, lemme 1.2.11.

Exercice 1.13.
Donner un exemple d'une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout n, A_n est infini et $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Corrigé. $A_n = [n, +\infty)$.

Exercice 1.14.
Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$(a_n, b_n), (\limsup a_n, \limsup b_n) \notin \{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\}.$$

Montrer que $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$. Donner un exemple de suites bornées pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte. Ecrire un énoncé analogue pour les $\liminf$.

Corrigé. cf. proposition 1.2.10 des notes de cours.

Exercice 1.15.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in X,\ \text{la suite } \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est élément de $\mathcal{M}$.

Corrigé. On a en utilisant le critère de Cauchy,

$$A = \{x \in X, \forall \epsilon \in \mathbb{Q} \cap]0,1], \exists N, \forall n \geq N, \forall k \geq 0, |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}$$

et par suite

$$A = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}\cap]0,1]} \Big[\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \Big(\cap_{n\geq N, k\geq 0} \{x \in X,\ |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\} \Big) \Big].$$

La mesurabilité des fonctions f_n assure que l'ensemble $\{x \in X,\ |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}$ est élément de $\mathcal{M}$ (cf. théorème 1.2.5 dans les notes de cours). L'ensemble A est donc une intersection dénombrable de réunion dénombrable d'intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$: c'est un élément de $\mathcal{M}$.

INTÉGRATION, Feuille d'exercices 2

Exercice 2.1.
Montrer que la fonction suivante est discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue sur $\mathbb{Q}^c$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q, p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*, \text{ fraction irréductible,} \\ 0 & \text{si } x \text{ irrationnel.} \end{cases}$$

Corrigé. Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de limite x_0. On a $f(x_0) = 0 = f(x_n)$ si $x_n \notin \mathbb{Q}$. On peut donc supposer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres rationnels non nuls avec $x_n = p_n/q_n, \quad p_n \in \mathbb{Z}^*, q_n \in \mathbb{N}^*$, fraction irréductible, $f(x_n) = 1/q_n$. Pour obtenir la continuité de f en x_0, il nous suffit de démontrer que $\lim q_n = +\infty$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait extraire de la suite d'entiers $(q_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée et donc extraire une suite stationnaire $(q_{n_j})_{j\geq 1}$, identiquement égale à un entier $q \geq 1$. La suite d'entiers $p_{n_j} = q_{n_j} x_{n_j} = q x_{n_j}$ serait également bornée et on pourrait en extraire une suite stationnaire, identiquement égale à un entier p. Une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ serait donc constante égale à p/q ; or cette suite converge vers x_0, ce qui donne $x_0 = p/q$, ce qui est impossible car $x_0 \notin \mathbb{Q}$.
De plus f est discontinue en tout point rationnel, car si $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) > 0$ et, pour n entier ≥ 1, $f(x_0 + \sqrt{2}/n) = 0$ (car $x_0 + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$).
Commentaire. $\mathbb{Q}$ est une réunion dénombrable de fermés de $\mathbb{R}$, c'est un F_σ de $\mathbb{R}$ (cf.§1.5 des notes de cours). On peut démontrer (cf.[GO1], [GO2]) que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un F_σ et que, étant donné D un F_σ , il existe une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement D. Par ailleurs, le théorème de Baire (cf. e.g. problème 1.2, feuille 1) implique que $\mathbb{Q}^c$ n'est pas un F_σ. Par conséquent, il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Q}$, discontinue sur $\mathbb{Q}^c$.

Exercice 2.2.
Soit X un borélien de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est mesurable.

Corrigé. cf.§1.2 dans les notes de cours, avant l'énoncé du théorème 1.2.5.

Exercice 2.3.
Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ des espaces mesurables et T un espace métrique séparable muni de la tribu des boréliens. Soient $u_1, \ldots, u_d$ des applications mesurables de X dans T et $\Phi : T^d \to Y$ mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \Phi\big(u_1(x), \ldots, u_d(x)\big) \end{array}$$

est mesurable.

Corrigé. C'est l'énoncé du théorème 1.2.5′ dans les notes de cours.

Exercice 2.4.
Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\alpha : X \to \mathbb{C}$ avec $|\alpha| \equiv 1$, telle que $f = \alpha |f|$.

Corrigé. cf. le lemme 1.2.6 dans les notes de cours.

Exercice 2.5.
Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_A = \{M \cap A\}_{M \in \mathcal{M}}$ est une tribu sur A, rendant l'injection canonique mesurable. Montrer que si en outre $A \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_A = \{M \in \mathcal{M}, M \subset A\}$.

Corrigé. $\mathcal{M}_A$ est stable par réunion dénombrable, contient $A = X \cap A$, et est stable par passage au complémentaire car, en notant B^c le complémentaire dans X, pour $M \in \mathcal{M}$,

$$(M \cap A)^c \cap A = (M^c \cup A^c) \cap A = M^c \cap A.$$

L'injection canonique ι est mesurable car, pour $M \in \mathcal{M}$, on a $\iota^{-1}(M) = M \cap A$. Le dernier point est trivial.

Exercice 2.6.
Montrer que l'addition des réels se prolonge par continuité à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que la multiplication des réels ne se prolonge pas par continuité à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que si l'on adopte la convention $0 \cdot \infty = 0$ cette nouvelle multiplication est associative, commutative, avec élément neutre 1 et distributive par rapport à l'addition. Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, f et g des fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que $f + g$ est mesurable. Montrer que $f \cdot g$ défini en adoptant la convention $0 \cdot \infty = 0$ est mesurable.

Corrigé. cf. la remarque 1.3.4 dans les notes de cours.

Exercice 2.7.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}$. Montrer que $\mu(\cup_{\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Montrer que

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

et généraliser cette formule aux cas faisant intervenir un nombre fini d'ensembles

$$A_1, \dots, A_n.$$

Corrigé. Pour la première partie, cf. la remarque 1.4.3 des notes de cours. En outre,

$$\mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cup A_2)$$

et par conséquent

$$\mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

c'est à dire

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2).$$

Ceci donne, si $\mu(A_1 \cap A_2) < +\infty$, la formule

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

On obtient également, en supposant $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) < +\infty$,

$$\begin{aligned}&\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) - \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_3) - \mu(A_2 \cap A_3) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

De manière générale, on obtient par récurrence sur n, en supposant $\mu(\cup_{1\le j\le n} A_j) < +\infty$,

$$\text{(e2.7.1)} \qquad \mu(\cup_{1\le j\le n} A_j) = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

En effet, nous avons établi la formule (e2.7.1) pour $n = 2$. Considérons un entier $n \ge 3$ et $A_1, \dots, A_n$ mesurables de mesures finies. Il vient

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{1\le j\le n} A_j) &= \mu(\cup_{1\le j\le n-1} A_j \cup A_n)\\
&= \mu(\cup_{1\le j\le n-1} A_j) + \mu(A_n) - \mu\big(\cup_{1\le j\le n-1}(A_j \cap A_n)\big)\\
&= \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})\\
&\quad + \mu(A_n)\\
&\quad - \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n-1} \mu\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_n\big)\\
&= \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n\\ [i_k\le n-1] \text{ ou bien } [i_k=n \text{ avec } k\ge 2]}} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \mu(A_n)\\
&= \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}), \quad \text{qed.}\end{aligned}$$

Commentaire. Dans l'avant-dernière somme, on considère les k-uplets

$$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$$

tels que $i_k \le n-1$ ainsi que ceux pour lesquels $i_k = n$ et $k \ge 2$; par suite il manque le k-uplet pour lequel $k = 1$ et $i_k = n$: c'est précisément le terme $\mu(A_n)$.

Exercice 2.8.
Soit X un ensemble et μ la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $\mu(A) = \mathrm{Card} A$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ est un espace mesuré.

Corrigé. Soit $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X, deux à deux disjointes. Si $\cup_{j\in\mathbb{N}}A_j$ est un ensemble fini, alors il existe N tel que $A_j=\emptyset$ pour $j>N$; par suite $\cup_{j\in\mathbb{N}}A_j=\cup_{0\le j\le N}A_j$ et les A_j sont finis deux à deux disjoints. On obtient bien

$$\mu(\cup_{j\in\mathbb{N}}A_j)=\mathrm{Card}(\cup_{0\le j\le N}A_j)=\sum_{0\le j\le N}\mathrm{Card}(A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Card}(A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu(A_j).$$

Si $\cup_{j\in\mathbb{N}}A_j$ est un ensemble infini, on a $\mu(\cup_{j\in\mathbb{N}}A_j)=+\infty$. Vérifions que $\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu(A_j)=+\infty$. Si l'un des ensembles A_j est infini, c'est vrai. Si tous les A_j sont finis, on ne peut avoir $M=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Card}(A_j)<+\infty$. En effet, cela impliquerait

$$\mathrm{Card}(\cup_{0\le j\le n}A_j)=\sum_{0\le j\le n}\mathrm{Card}(A_j)\le M,$$

et par conséquent $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Card}(\cup_{0\le j\le n}A_j)\le M$. Or, comme l'ensemble $\cup_{j\in\mathbb{N}}A_j$ est infini, la suite $\big(\mathrm{Card}(\cup_{0\le j\le n}A_j)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Exercice 2.9.
Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable et $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{M}$. Montrer que $\sum_{k\ge0}\mu_k$ définit une mesure positive sur $\mathcal{M}$.

Corrigé. En posant, pour $A\in\mathcal{M}$, $\mu(A)=\sum_{k\ge0}\mu_k(A)$, on voit que $\mu(\emptyset)=0$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}$ d'ensembles deux à deux disjoints, on a, en utilisant le lemme 1.2.11,

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu_k(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_k(A_n)\Big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu_k(A_n)\Big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n),\text{qed.}$$

Commentaire. On pourra également consulter l'exercice 2 du 14/11/1998 dans le paragraphe examens corrigés.

Exercice 2.10.
Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X)=1$. On considère

$$\mathcal{T}=\{A\in\mathcal{M},\ \mu(A)=0 \text{ ou } \mu(A)=1\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Corrigé. cf. l'exercice 1 du 14/11/1998 dans le paragraphe examens corrigés.

Exercice 2.11.
Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{M}$. On suppose que pour tout $A\in\mathcal{M}$ et pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\mu_j(A)\le\mu_{j+1}(A)$. Pour $A\in\mathcal{M}$, on pose

$$\mu(A)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\mu_j(A).$$

a. Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$.
b. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et pour $j \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$, on définit $\nu_j(A) = \mathrm{Card}(A \cap [j, +\infty[)$($\mathrm{Card} E$ désigne le nombre d'éléments de E si E est fini, $+\infty$ sinon). Montrer que ν_j est une mesure positive définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$. On pose

$$\nu(A) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \nu_j(A).$$

Montrer que $\nu(\mathbb{N}) = +\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu(\{k\}) = 0$. En déduire que ν n'est pas une mesure sur $\mathbb{N}$.

Corrigé. cf. l'exercice 2 du 14/11/1998 dans le paragraphe examens corrigés.

Exercice 2.12.
Soit $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure positive définie sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu(K) < +\infty$ pour K compact (*on dira que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$*). Soit

$$D = \{a \in \mathbb{R}, \mu(\{a\}) > 0\}.$$

a. Soient n, l des entiers ≥ 1. On pose $D_{n,l} = \{a \in \mathbb{R}, |a| \leq n \text{ et } \mu(\{a\}) \geq 1/l\}$. Montrer que $D_{n,l}$ est fini. Montrer que D est dénombrable.
b. On pose pour $E \in \mathcal{B}$, $\lambda(E) = \mu(D \cap E)$. Montrer que cela a un sens et que λ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda = \sum_{a \in D} \mu(\{a\}) \delta_a,$$

où δ_a est la masse de Dirac en a (i.e. $\delta_a(E) = \mathbf{1}_E(a)$).
c. Montrer que $\mu = \lambda + \nu$ où ν est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu(\{x\}) = 0$.

Corrigé. cf. l'exercice 2 du 20/11/1999 dans le paragraphe examens corrigés.

Exercice 2.13.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables

$$A = \{x \in X, \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = +\infty\}, \qquad B = \{x \in X, \text{ la suite } (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Corrigé. On a $A = \{x \in X, \forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n(x) \geq m\}$, de sorte qu'en posant

$$A_{n,m} = \{x \in X, u_n(x) \geq m\},$$

il vient $A = \cap_{m \in \mathbb{N}} \Big(\cup_{N \in \mathbb{N}} \big(\cap_{n \geq N} A_{n,m} \big) \Big)$ qui est mesurable car chaque $A_{n,m}$ l'est. De manière analogue, on a $B = \{x \in X, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leq m\} = \cup_{m \in \mathbb{N}} \big(\cap_{n \in \mathbb{N}} B_{n,m} \big)$, avec $B_{n,m} = \{x \in X, |u_n(x)| \leq m\}$.

Exercice 2.14.
Soient X, Y deux espaces métriques et soit $f : X \to Y$, une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable (X, Y sont munis de leur tribu borélienne).

Corrigé. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. L'application $F : X\backslash D \to Y$ définie par $F(x) = f(x)$ est continue. Soit V un ouvert de Y. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) = \{x \in X, f(x) \in V\} &= \{x \in X\backslash D, f(x) \in V\} \cup \big(f^{-1}(V) \cap D\big) \\ &= F^{-1}(V) \cup \big(f^{-1}(V) \cap D\big) = \big(U \cap (X\backslash D)\big) \cup \big(f^{-1}(V) \cap D\big), \end{aligned}$$

où U est un ouvert de X. Or D est mesurable comme réunion dénombrable de points. Par suite, $U \cap D^c$ est mesurable. De plus, $f^{-1}(V) \cap D$ est dénombrable, donc mesurable. Finalement, $f^{-1}(V)$ est mesurable et d'après le lemme 1.1.4, f est mesurable.

Exercice 2.15.
Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ où $x \in X$.
a. Montrer que $A \in \mathcal{M}$ si et seulement si A est dénombrable ou bien A^c est dénombrable.
b. Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= 0, \quad \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ \mu(A) &= 1, \quad \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$.

Corrigé. Si A est une partie dénombrable de X, A est réunion dénombrable d'ensembles à un élément et appartient donc à $\mathcal{M}$. Comme $\mathcal{M}$ est aussi stable par passage au complémentaire, on trouve également que si A^c est dénombrable, $A \in \mathcal{M}$. Considérons

$$\mathcal{N} = \{A \subset X, A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}.$$

Nous venons de démontrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Par ailleurs $\mathcal{N}$ est stable par passage au complémentaire, contient X et toutes les parties à un élément. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{N}$. Si tous les A_n sont dénombrables, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable et donc est élément de $\mathcal{N}$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit non dénombrable, alors A_k^c est dénombrable et comme

$$\big(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset A_k^c,$$

on obtient que $\big(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c$ est dénombrable et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$. L'ensemble $\mathcal{N}$ est donc une tribu qui contient toutes les parties à un élément de X. On obtient donc que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ et par suite $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. Ceci achève la démonstration de (a).
On a $\mu(\emptyset) = 0$; soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Si tous les A_n sont dénombrables, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable et

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit non dénombrable, alors A_k^c est dénombrable et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est non dénombrable. Comme

$$A_k^c \supset \cup_{n\neq k} A_n,$$

A_n est dénombrable pour $n \neq k$ et $\mu(A_n) = 0$ pour $n \neq k$. Par suite

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 = \mu(A_k) = \mu(A_k) + \sum_{n\in\mathbb{N}, n\neq k} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \quad \text{qed.}$$

Exercice 2.16.
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des applications mesurables. Montrer que les ensembles suivants appartiennent à $\mathcal{M}$.

$$A = \{x \in X, f(x) \leq g(x)\}, \qquad B = \{x \in X, f(x) < g(x)\}, \qquad C = \{x \in X, f(x) = g(x)\}.$$

Corrigé. L'application $X \ni x \mapsto \Phi(x) = \big(f(x), g(x)\big) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable d'après la démonstration du <u>théorème 1.2.5′</u>. On a alors $A = \Phi^{-1}(L)$ avec

$$L = \{(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \alpha \leq \beta\}$$

qui est un fermé de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. On a de même

$$M = \{(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \alpha < \beta\}, \ B = \Phi^{-1}(M),$$
$$N = \{(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \alpha = \beta\}, \ C = \Phi^{-1}(N),$$

et M est ouvert, N est fermé.

Exercice 2.17.
Un exercice de révision non nécessairement superflu. Les amateurs de formules pourront consulter le site

http://integrals.wolfram.com/

en respectant scrupuleusement la typographie un peu étrange donnée dans

http://integrals.wolfram.com/about/input/

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de définition.

$\tan x$	$\cot x$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{1}{\sin x}$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\sin^2 x$
$\sin^3 x$	$\cos^2 x$	$\cos^3 x$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
$\coth x$	$\dfrac{1}{\cosh x}$	$\dfrac{1}{\sinh x}$	$\cosh^2 x$
$\mathrm{argsh} x$	$\mathrm{argch} x$	$\mathrm{argth} x$	$\mathrm{argcoth} x$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\dfrac{x}{1-x^2}$	$\dfrac{x}{x^2+1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Corrigé. Si f est une fonction continue sur un ouvert I de la droite réelle, on notera $\int f(x)dx$ une primitive de f sur I. Passons en revue quelques formules classiques avec *les 33 inévitables.*

$$
\begin{array}{llll}
\displaystyle\int x^\alpha \, dx &= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{pour } \alpha \neq -1, & I &= (0,+\infty) \\
\displaystyle\int x^{-1} \, dx &= \ln|x| & I &= \mathbb{R}^* \\
\displaystyle\int e^{zx} \, dx &= z^{-1}e^{zx} \quad \text{pour } z \neq 0, & I &= \mathbb{R} \\
\displaystyle\int \tan x \, dx &= -\ln|\cos x| & I &= \mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}) \\
\displaystyle\int \cot x \, dx &= \ln|\sin x| & I &= \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z} \\
\displaystyle\int \dfrac{1}{\cos x} \, dx &= \ln\left|\tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right| & I &= \mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}) \\
\displaystyle\int \dfrac{1}{\sin x} \, dx &= \ln\left|\tan(\dfrac{x}{2})\right| & I &= \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z} \\
\displaystyle\int \arcsin x \, dx &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} & I &= (-1,1) \\
\displaystyle\int \arccos x \, dx &= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} & I &= (-1,1) \\
\displaystyle\int \arctan x \, dx &= x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) & I &= \mathbb{R}
\end{array}
$$

$$\int \sin^2 x \; dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \cos^2 x \; dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \tan x \qquad I = \mathbb{R}\backslash(\tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \; dx = -\cot x \qquad I = \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$$
$$\int \sinh x \; dx = \cosh x \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \cosh x \; dx = \sinh x \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \tanh x \; dx = \ln|\cosh x| \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \coth x \; dx = \ln|\sinh x| \qquad I = \mathbb{R}^*$$
$$\int \frac{1}{\cosh x} \; dx = \arctan(\sinh x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\sinh x} \; dx = \ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right| \qquad I = \mathbb{R}^*$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \; dx = \tanh x \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \; dx = -\coth x \qquad I = \mathbb{R}^*$$
$$\int \tanh x \; dx = \ln(\cosh x) \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \coth x \; dx = \ln|\sinh x| \qquad I = \mathbb{R}^*$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \arcsin x \qquad I = (-1,1)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \; dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|(=\text{argch } x \text{ pour } x \geq 1) \qquad I = \mathbb{R}\backslash(-1,1)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \; dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \text{argsh}x \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{x^2+1} \; dx = \arctan x \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{1-x^2} \; dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|(= \text{argth}x\text{pour } |x| < 1) \qquad I = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$
$$\int \ln x \; dx = x\ln x - x \qquad I = (0,+\infty)$$
$$\int \sqrt{1+x^2} \; dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad I = \mathbb{R}$$
$$\int \sqrt{1-x^2} \; dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x \qquad I = (-1,1)$$
$$\int \sqrt{x^2-1} \; dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| \qquad I = \mathbb{R}\backslash(-1,1)$$

On a également

$$\begin{aligned}\int \mathrm{argsh}x\ dx &= x\mathrm{argsh}x - \sqrt{1+x^2},\\ \int \mathrm{argch}x\ dx &= x\mathrm{argch}x - \sqrt{x^2-1}, \quad \text{sur } x>1,\\ \int \mathrm{argth}x\ dx &= x\mathrm{argth}x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2), \quad \text{sur } |x|<1,\\ \int \mathrm{argcoth}x\ dx &= x\mathrm{argcoth}x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) \quad \text{sur } x>1.\end{aligned}$$

Pour le calcul de primitives de fractions rationnelles, on utilise la décomposition en éléments simples de première espèce $(x-\alpha)^{-m}$ et de seconde espèce $(x^2+\alpha^2)^{-1}$, $x(x^2+\alpha^2)^{-1}$. Pour le calcul d'une primitive de $F(\cos x, \sin x)$ où F est une fraction rationnelle, on peut faire les changements de variable suivants.

(i) $u = \sin x$, si la transformation $x \mapsto \pi - x$ laisse invariante la forme $F(\cos x, \sin x)dx$. C'est le cas par exemple de $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ car

$$\sin^4(\pi - x)\cos^5(\pi - x)d(\pi - x) = \sin^4 x \cos^5 x dx$$

Ceci se généralise sans difficulté au calcul de $\int \sin^k x \cos^{2l+1} x dx$ avec k, l entiers.

(ii) $u = \cos x$, si la transformation $x \mapsto -x$ laisse invariante la forme $F(\cos x, \sin x)dx$. C'est le cas par exemple de $\int \sin^5 x \cos^7 x dx$ car

$$\sin^5(-x)\cos^7(-x)d(-x) = \sin^5 x \cos^7 x dx$$

Ceci se généralise au calcul de $\int \sin^{2k+1} x \cos^l x dx$ avec k, l entiers.

(iii) $u = \tan x$, si la transformation $x \mapsto \pi + x$ laisse invariante la forme $F(\cos x, \sin x)dx$. C'est le cas par exemple de $\int \sin^4 x \cos^6 x dx$ car

$$\sin^4(\pi + x)\cos^6(\pi + x)d(\pi + x) = \sin^4 x \cos^6 x dx$$

Ceci se généralise au calcul de $\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx$ avec k, l entiers.

(iv) En dernier ressort, on pourra toujours faire le changement $u = \tan \frac{x}{2}$ qui fournira une fraction rationnelle en u.

Cette méthode s'étend au cas d'une fraction rationnelle de $\sinh x, \cosh x$.
Donnons quelques exemples d'intégrales dites "abéliennes" de la forme

$$\int F\big(x, \varphi(x)\big) dx \tag{e2.17.1}$$

où F est une fraction rationnelle. On cherche par exemple $\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$. On pose $x = \sinh t$ et on obtient $\int R(\sinh t, \cosh t)\cosh t dt$, qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle en sinh, cosh. Pour $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, on pose $x = \cosh t$; pour $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, on pose $x = \sin t$. Par ailleurs, si on dispose d'une représentation paramétrique *unicursale* du graphe de la fonction φ, c'est à dire de fractions rationnelles α, β telle que $t \mapsto \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$ décrive le graphe, on se ramène au calcul de

$$\int F(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t)dt$$

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle. C'est le cas par exemple de

$$\int F(x, x^{1/2} + x^{1/3})dx$$

pour laquelle on a $\alpha(t) = t^6, \beta(t) = t^3 + t^2$.
On peut également s'intéresser au calcul de

$$\int e^{zt}P(t)dt, \tag{e2.17.2}$$

où $z \in \mathbb{C}$ et P est un polynôme. On peut d'emblée chercher une solution du type $e^{zt}Q(t)$ où Q est un polynôme, ou bien intégrer par parties en remarquant pour $z \neq 0$,

$$\int e^{zt}P(t)dt = z^{-1}e^{zt}P(t) - \int z^{-1}e^{zt}P'(t)dt, \quad \deg P' < \deg P.$$

Bien entendu, il faudra aussi retenir que certaines intégrales peuvent se calculer sans qu'il soit possible de déterminer explicitement une primitive. L'exemple le plus célèbre est sans conteste l'intégrale de Gauss

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \pi^{1/2}a^{-1/2}, \quad a \in \mathbb{C}^*,\ \operatorname{Re} a \geq 0. \tag{e2.17.3}$$

Pour obtenir cette formule pour $a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a > 0$, il suffit de la démontrer pour $a > 0$ et d'utiliser le prolongement analytique, puisque les deux membres sont holomorphes sur l'ouvert $\{\operatorname{Re} a > 0\}$. Notons que la détermination principale du logarithme est définie pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ par l'intégrale sur le segment $[1, z]$

$$\ln z = \oint_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi},$$

et que $\exp(\ln z) = z$ par prolongement analytique, $\ln(\exp z) = z$ pour $|\operatorname{Im} z| < \pi$. On définit $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$. Pour obtenir (e2.17.1) pour $\operatorname{Re} a > 0$ il suffit donc de le démontrer pour $a = 1$, puisqu'un changement de variable permet de s'y ramener. Or, en utilisant la page VII.9 de [Bou], on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt = \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}.$$

Il nous reste à démontrer la formule pour $0 \neq a \in i\mathbb{R}$. On se ramène par un changement de variable à démontrer

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{ix^2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2} e^{i\pi/4}.$$

Or pour $\epsilon > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\epsilon - i)x^2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2} (\epsilon - i)^{-1/2} \underset{\epsilon \to 0_+}{\longrightarrow} \frac{\pi^{1/2}}{2} e^{i\pi/4},$$

et comme, pour tout $A > 0$,

$$\frac{\pi^{1/2}}{2} e^{i\pi/4} = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_0^{+\infty} e^{-(\epsilon - i)x^2} dx = \int_0^A e^{ix^2} dx + \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_A^{+\infty} x^{-1} x e^{-(\epsilon - i)x^2} dx$$

et

$$\int_A^{+\infty} x^{-1} x e^{-(\epsilon - i)x^2} dx =$$

$$\big[x^{-1} e^{-(\epsilon - i)x^2} (-\epsilon + i)^{-1} 2^{-1}\big]_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} x^{-2} e^{-(\epsilon - i)x^2} (-\epsilon + i)^{-1} 2^{-1} dx$$

$$= -(2i - 2\epsilon)^{-1} A^{-1} e^{-(\epsilon - i)A^2} + (-\epsilon + i)^{-1} 2^{-1} \int_A^{+\infty} x^{-2} e^{-(\epsilon - i)x^2} dx,$$

il vient

$$\frac{\pi^{1/2}}{2} e^{i\pi/4} = \int_0^A e^{ix^2} dx - (2i)^{-1} A^{-1} + (2i)^{-1} \int_A^{+\infty} x^{-2} e^{ix^2} dx,$$

et puisque

$$\left| \int_A^{+\infty} x^{-2} e^{ix^2} dx \right| \leq \int_A^{+\infty} x^{-2} dx = A^{-1},$$

on obtient

$$\frac{\pi^{1/2}}{2} e^{i\pi/4} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{ix^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx, \quad \text{qed.}$$

On obtient donc les intégrales de Fresnel

(e2.17.4) $$\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{\mathbb{R}} \sin(x^2) dx,$$

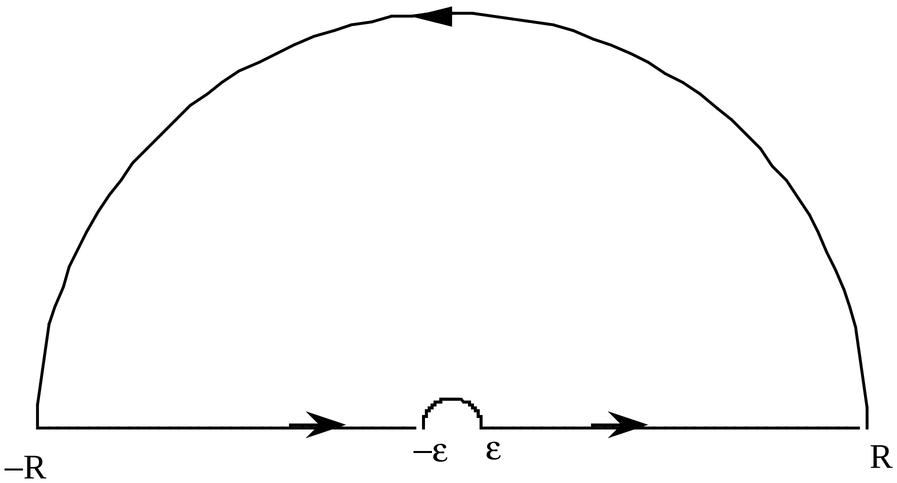
et de manière générale la formule pour $b \in \mathbb{R}^*$,

(e2.17.5) $$\int_{\mathbb{R}} e^{ibx^2} dx = \pi^{1/2} |b|^{-1/2} e^{i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} b}.$$

Un autre calcul classique est celui de

(e2.17.6) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Cette intégrale a déjà été étudiée dans l'exercice 1.7. Donnons une preuve courte de (e2.17.6). On intègre la fonction entière e^{iz}/z sur le contour suivant:



On obtient

$$0 = 2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta - \int_0^{\pi} \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta.$$

La troisième intégrale tend vers $i\pi$ lorsque ϵ tend vers 0. La valeur absolue de la seconde intégrale est majorée par $\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$ qui tend vers 0 lorsque R tend[4] vers l'infini, ce qui donne (e2.17.6).

[4] On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir ceci mais c'est excessif: il suffit de remarquer que $0 \leq \frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$ et

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta \leq \pi/R.$$

INTEGRATION, Feuille d'exercices 3

Exercice 3.1.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*\big(f_*(\mu)\big).$$

Corrigé. La mesure image $f_*(\mu)$ est définie sur la tribu $\mathcal{N} = \{B \subset Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ en (1.4.13) dans les notes de cours par

$$f_*(\mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big).$$

La mesure image $g_*\big(f_*(\mu)\big)$ est définie sur la tribu

$$\mathcal{T} = \{C \subset Z, g^{-1}(C) \in \mathcal{N}\} = \{C \subset Z, f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big) \in \mathcal{M}\} = \{C \subset Z, (g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{M}\}$$

par

$$g_*\big(f_*(\mu)\big)(C) = f_*(\mu)\big(g^{-1}(C)\big) = \mu\Big(f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big)\Big) = \mu\big((g \circ f)^{-1}(C)\big).$$

Par conséquent les mesures $g_*\big(f_*(\mu)\big)$ et $(g \circ f)_*(\mu)$ coïncident sur la tribu $\mathcal{T}$.
Commentaire. Si $\varphi : Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction mesurable (l'image réciproque d'un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ appartient à $\mathcal{N}$), on a

$$\int_Y \varphi d\big(f_*(\mu)\big) = \int_X (\varphi \circ f) d\mu. \tag{e3.1.1}$$

En effet cette formule est vérifiée pour φ étagée, car si $\varphi = \sum_{1 \le j \le m} \alpha_j \mathbf{1}_{B_j}$,

$$\int_Y \varphi d\big(f_*(\mu)\big) = \sum_{1 \le j \le m} \alpha_j f_*(\mu)(B_j) = \sum_{1 \le j \le m} \alpha_j \mu(f^{-1}\big(B_j)\big)$$
$$\big(\text{on utilise ici } \mathbf{1}_{B_j} \circ f = \mathbf{1}_{f^{-1}(B_j)}\big) = \sum_{1 \le j \le m} \alpha_j \int (\mathbf{1}_{B_j} \circ f) d\mu = \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Le théorème de Beppo-Levi (théorème 1.6.1) et le théorème d'approximation 1.3.3 permettent d'obtenir (e3.1.1) pour φ mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette formule est également valide pour $\varphi \in \mathcal{L}^1\big(f_*(\mu)\big)$.
Changeons un peu les notations et considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (P est une mesure positive et $P(\Omega) = 1$). Considérons une variable aléatoire réelle X, i.e. une

application mesurable de Ω à valeurs réelles. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est par définition la mesure image $X_*(P)$ définie par

$$X_*(P)(I) = P\big(X^{-1}(I)\big) = P\big(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}\big)$$

souvent noté simplement $P(\{X \in I\})$. Dans un cas certainement déjà familier au lecteur, la variable X prend un nombre fini de valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec des probabilités $p_1, \dots, p_n$ ($p_j \geq 0$ et $\sum_j p_j = 1$). La loi de X est une probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\sum_{1 \leq j \leq n} p_j \delta_{x_j}.$$

Un autre cas assez standard est celui où la loi de la variable aléatoire est donnée par une "densité" f (positive et d'intégrale 1) de sorte que

$$P(\{X \in I\}) = \int_I f(x)dx.$$

On pourra revenir au paragraphe 1.4 des notes de cours pour d'autres exemples (1.4.8-9-10-11-12).

Exercice 3.2.
On note $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et on considère une mesure positive μ définie sur $\mathcal{B}$ et finie sur les compacts. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a,t[) & \text{si } t > a, \\ -\mu([t,a[) & \text{si } t \leq a. \end{cases}$$

Montrer que F_a est croissante et continue à gauche.

Corrigé. Soient $s < t$ des réels. Pour $s > a$, on a $[a,s[\subset [a,t[$ et donc $F_a(s) = \mu([a,s[) \leq \mu([a,t[) = F_a(t)$. Pour $s \leq a < t$, on a $F_a(s) = -\mu([s,a[) \leq 0 \leq \mu([a,t[) = F_a(t)$. Pour $s < t \leq a$, on a $[t,a[\subset [s,a[$ et donc $F_a(s) = -\mu([s,a[) \leq -\mu([t,a[) = F_a(t)$. La fonction F_a est donc croissante.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 > a$ et soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de limite t_0. On a

$$[a, t_0[= \cup_{n \geq 1} [a, t_n[$$

et en utilisant la proposition 1.4.2.(b), il vient

$$F_a(t_0) = \mu([a,t_0[) = \lim_{n \to \infty} \mu([a,t_n[) = \lim_{n \to \infty} F_a(t_n).$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 \leq a$ et soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de limite t_0. On a

$$[t_0, a[= \cap_{n \geq 1} [t_n, a[$$

et en utilisant la proposition 1.4.2.(c) et $\mu([t_1, a[) \le \mu([t_1, a]) < +\infty$, il vient

$$F_a(t_0) = -\mu([t_0, a[) = -\lim_{n\to\infty} \mu([t_n, a[) = \lim_{n\to\infty} F_a(t_n).$$

Exercice 3.3.
Déterminer l'ensemble des réels α, β, γ tels que

$$u_\alpha(t) = \frac{t^\alpha e^{-t}}{(1+t^{1/2})} \in L^1(\mathbb{R}_+), \qquad v_\beta(t) = \frac{\sin t}{t^\beta e^t} \in L^1(\mathbb{R}_+), \qquad w_\gamma(t) = \frac{\ln|t|}{|t|^\gamma} \in L^1([-1,1]).$$

Corrigé. $\alpha > -1$: si cette condition est vérifiée, u_α appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$ et réciproquement si $u_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$, alors $u_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et donc $t^\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, ce qui implique $\alpha > -1$.
$\beta < 2$: si cette condition est vérifiée, v_β appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$ car $v_\beta \in L^1([r, +\infty[)$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et tout $r > 0$ et $v_\beta(t) \sim t^{1-\beta}$ au voisinage de 0. Réciproquement si $v_\beta \in L^1(\mathbb{R}_+)$, alors $v_\beta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et donc $t^{1-\beta} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, ce qui implique $1-\beta > -1$, i.e. $\beta < 2$.
$\gamma < 1$: en utilisant la parité de w_γ et en posant $t = 1/x$, on trouve que $w_\gamma \in L^1([-1,1])$ équivaut à $x^{\gamma-2}\ln x \in L^1([1, +\infty[)$ qui équivaut à $\gamma - 2 < -1$ i.e. $\gamma < 1$.

Exercice 3.4.
a. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx$.
b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{z-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = \Gamma(z).$$

Corrigé. Pour $x \ge 0$, on a $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}$ (prendre le logarithme). Par ailleurs, pour tout $\theta > -1$, on a $\ln(1+\theta) \le \theta$ et par conséquent, pour $0 \le x < n$, on a

$$\ln\bigl(1-\frac{x}{n}\bigr) \le -\frac{x}{n} \quad \text{ et donc } \quad 0 \le \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\bigl(1-\frac{x}{n}\bigr)^n \le e^{-x},$$

ce qui permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour les questions (a) et (b). La réponse à (a) est donc $1 = \Gamma(1)$.

Exercice 3.5.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable telle que $\int_X f d\mu < +\infty$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\mu(A) < \alpha \quad \text{ implique } \quad \int_A f d\mu < \epsilon.$$

Corrigé. Voir la correction de l'exercice 3 de l'examen du 14/11/1998 dans le paragraphe examens corrigés.

Exercice 3.6.
Soit m la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Construire un ouvert Ω dense dans $\mathbb{R}$ tel que $m(\Omega) < \epsilon$.

Corrigé. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est équipotent à $\mathbb{N}$. On peut considérer $\mathbb{Q} = \{x_n\}_{n\geq 1}$ et définir

$$\Omega = \cup_{n\geq 1}]x_n - \epsilon 2^{-n-2}, x_n + \epsilon 2^{-n-2}[,$$

qui est ouvert comme réunion d'ouverts, dense car contenant $\mathbb{Q}$ et de mesure

$$m(\Omega) \leq \sum_{n\geq 1} \epsilon 2^{-n-1} = \epsilon/2 < \epsilon.$$

Exercice 3.7.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $\Phi : X \longrightarrow Y$ une application. En considérant la tribu image, la mesure image $\Phi_*(\mu)$ et une application mesurable $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que

$$\int_X (g \circ \Phi) d\mu = \int_Y g d(\Phi_*(\mu))$$

Corrigé. Voir la formule (e3.1.1) ci-dessus.

Exercice 3.8.
Donner un exemple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ convergeant simplement vers 0 telle que

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to +\infty.$$

Corrigé. Considérer la suite $f_n = n^2 \varphi_n$ où φ_n est définie dans l'exercice 1.5.

Exercice 3.9.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. on dit que f est *essentiellement majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\mu\big(\{x \in X, f(x) > M\}\big) = 0.$$

On pose alors

$$\text{essup} f = \inf\Big\{M \in \mathbb{R}_+, \mu(\{x \in X, f(x) > M\}) = 0\Big\}.$$

a. Montrer qu'une fonction majorée par un réel M est essentiellement majorée. Donner un exemple de fonction essentiellement majorée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui ne soit pas majorée.
b. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction essentiellement majorée. Montrer que

$$0 \leq f \leq \mathrm{essup} f, \quad \mu - \text{presque partout}.$$

c. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ des fonctions mesurables essentiellement majorées. Montrer que $f + g$ est essentiellement majorée et que

$$\mathrm{essup}(f+g) \leq \mathrm{essup} f + \mathrm{essup} g.$$

Corrigé. Voir la définition 3.2.2 et la remarque 3.2.3 dans les notes de cours.

Exercice 3.10.
Soit X un ensemble. On appelle mesure extérieure sur X une application

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

telle que

(*i*) $\mu(\emptyset) = 0$,
(*ii*) $A \subset B \subset X$ implique $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),
(*iii*) $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ (sous-additivité dénombrable).

Montrer que μ^* définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$\mu^*(A) = \inf \{\sum_{j\in\mathbb{N}} (b_j - a_j)\}$$

où $\cup_{j\in\mathbb{N}}]a_j, b_j[$ parcourt les recouvrements ouverts de A, est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.
Corrigé. Les propriétés (*i*) et (*ii*) sont immédiates. Montrons (*iii*). Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. On peut supposer que tous les $\mu^*(A_n)$ sont finis, sinon (*iii*) est vérifié trivialement. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère une famille dénombrable d'intervalles ouverts bornés $(I_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$A_n \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n, \quad \mu^*(A_n) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k^n| < \mu^*(A_n) + \epsilon 2^{-n-1},$$

où l'on a noté $|I_k^n|$ la longueur de l'intervalle I_k^n. On a alors

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \cup_{n,k\in\mathbb{N}} I_k^n$$

et par conséquent

$$\mu^*\big(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |I_k^n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k^n|\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\mu^*(A_n) + \epsilon 2^{-n-1}\big) = \epsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n),$$

ceci pour tout $\epsilon > 0$, ce qui donne le résultat.

Exercice 3.11.
Trouver une suite de fonctions en escalier $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$ et telle que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pour aucun $x \in [0,1]$.
Corrigé. Considérons pour $0 \leq k < m$ entiers la fonction

$$F_{k,m}(x) = \mathbf{1}_{[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}[}(x)$$

et posons

$$\begin{aligned}
&f_0 = F_{0,1} \\
&f_1 = F_{0,2}, \quad f_2 = F_{1,2} \\
&f_3 = F_{0,3}, \quad f_4 = F_{1,3}, \quad f_5 = F_{2,3}
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\frac{m(m-1)}{2}} = F_{0,m}, \ \ldots \ , f_{\frac{m(m-1)}{2}+k} = F_{k,m}, \ \ldots \ , f_{\frac{m(m-1)}{2}+m-1} = F_{m-1,m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Un simple dessin convaincra le lecteur que pour x fixé, la suite $f_n(x)$ prend une infinité de fois les valeurs 0 et 1, ce qui montre sa divergence. Néanmoins dans la suite, nous nous sommes efforcés de donner les détails du problème de numérotation auquel on doit faire face pour traiter exhaustivement cette question. La complexité apparente de la rédaction donne malheureusement l'impression qu'une difficulté réelle est dissimulée dans ce problème, ce qui n'est pas le cas.
On remarque que la suite $\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)_{m\geq 1}$ est strictement croissante, vaut 0 pour $m = 1$ et tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un unique entier $m_n \geq 1$ tel que

$$\frac{m_n(m_n-1)}{2} \leq n < \frac{m_n(m_n+1)}{2}$$

et par conséquent

$$n = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + k_n, \quad \text{avec } 0 \leq k_n < \frac{m_n 2}{2} = m_n.$$

Remarquons que $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ car $m_n + 1 > \sqrt{2n}$. Pour $n \geq 0$, posons

$$f_n(x) = F_{k_n,m_n}(x).$$

On a

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 F_{k_n,m_n}(x)dx = 1/m_n \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \geq 3$ tel que $f_n(x) = 1$: alors $\frac{k_n}{m_n} \leq x < \frac{1+k_n}{m_n}$ et si $k_n < m_n - 1$, on a

$$\frac{m_n(m_n-1)}{2} \leq n < n+1 = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + k_n + 1 < \frac{m_n(m_n-1)}{2} + m_n = \frac{m_n(m_n+1)}{2},$$

ce qui donne $m_{n+1} = m_n$ et $f_{n+1}(x) = F_{1+k_n,m_n}(x) = 0$. Si $f_n(x) = 1$ et $k_n = m_n - 1$, on a $\frac{m_n-1}{m_n} \leq x < 1$ et

$$n+1 = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + m_n = \frac{m_n(m_n+1)}{2}, \quad \text{et donc} \quad m_{n+1} = 1 + m_n,\ k_{n+1} = 0,$$

ce qui donne

$$f_{n+1}(x) = F_{0,1+m_n}(x) = 0 \quad \text{car } \frac{1}{1+m_n} \leq \frac{m_n-1}{m_n} \text{ car } m_n \geq 2.$$

Par suite,

(e3.11.1) $$\text{pour } n \geq 3, \quad f_n(x) = 1 \Longrightarrow f_{n+1}(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour $x \in [0,1[$ et $n \geq 0$, on a $0 \leq m_n x < m_n$ et par conséquent

$$k = E(m_n x) \in \{0, \ldots, m_n - 1\}.$$

Considérons $n' = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + k \geq \frac{m_n(m_n-1)}{2}$. On a

$$k \leq m_n x < 1+k, \quad \frac{k}{m_n} \leq x < \frac{1+k}{m_n}$$

et par suite

(e3.11.2) $$f_{n'}(x) = F_{k,m_n}(x) = 1,$$

ce qui implique que la suite $f_n(x)$ prend une infinité de fois la valeur 1. Comme elle prend aussi une infinité de fois la valeur 0 à cause de (e3.11.2-1), elle ne peut converger. Le cas $x = 1$ se traite de manière analogue. En utilisant des fonctions affines par morceaux, on peut modifier l'exemple ci-dessus de sorte que les fonctions f_n soient continues.

Exercice 3.12.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que cette suite est croissante et que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < +\infty$. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est fini $\mu - pp$. Donner un énoncé analogue pour les séries de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Corrigé. Le théorème de Beppo-Levi (théorème 1.6.1) assure que, avec $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$

$$\int_X f d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu,$$

et par conséquent f est une fonction mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\int_X f d\mu < +\infty$.

et par conséquent f est une fonction mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\int_X f d\mu < +\infty$. Par suite, si $N = \{x \in X, f(x) = +\infty\}$, on a pour tout entier naturel k

$$k\mu(N) \leq \int_N f d\mu \leq \int_X f d\mu < +\infty$$

et la suite $(k\mu(N))_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée, ce qui implique $\mu(N) = 0$.
De même, si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

$$\sum_{k\geq 0} \int_X u_k d\mu < +\infty,$$

alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)$ converge μ-presque partout vers une limite finie. Le corollaire 1.6.2 implique

$$\int_X (\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k) d\mu = \sum_{k\geq 0} \int_X u_k d\mu <= \infty$$

et par conséquent, d'après ce qui précède, la fonction $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)$ est finie presque partout, qed.

Exercice 3.13.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$. On suppose que, pour tout $E \in \mathcal{M}$, $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que f est nulle $\mu - pp$.
Corrigé. En particulier, pour $E = \{x \in X, \operatorname{Re} f(x) \geq 0\}$, il vient

$$0 = \operatorname{Re}\Big(\int_E f d\mu\Big) = \int_E (\operatorname{Re} f) d\mu \Longrightarrow \mathbf{1}_{\{\operatorname{Re} f\geq 0\}} \operatorname{Re} f = 0 \quad \mu - pp,$$

et comme on a de même $\mathbf{1}_{\{\operatorname{Re} f\leq 0\}} \operatorname{Re} f = 0$ presque partout il vient $\operatorname{Re} f = 0$, pp. On obtient de manière analogue $\operatorname{Im} f = 0$, pp et le résultat.

Exercice 3.14.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable.
a. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0.$$

La réciproque est-elle vraie ?
b. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

La réciproque est-elle vraie?

Corrigé. (a) On a

$$0 \leq n\mu\big(\{|f| \geq n\}\big) = \int_X n\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} d\mu \leq \int_X |f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} d\mu.$$

On a $0 \leq g_n = |f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} \leq |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{n\to\infty} |f(x)|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}}(x) = 0$: le théorème de convergence dominée (théorème 1.6.8) assure que $\lim_n \int_X |f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} d\mu = 0$ et le résultat. La réciproque est fausse. La fonction continue positive sur $[0, e^{-1}]$ donnée par $g(x) = x\ln(x^{-1})$ a pour dérivée $\ln(x^{-1}) - 1$ et est donc croissante sur $[0, e^{-1}]$ de $g(0) = 0$ à $g(e^{-1}) = e^{-1}$. On a

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{g(x)} = \int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln(x^{-1})} = \int_e^{+\infty} \frac{du}{u\ln(u)} = \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln A) = +\infty.$$

Néanmoins, pour $n \geq 1$,

$$\{x \in [0, e^{-1}], \frac{1}{g(x)} \geq n\} = \{x \in [0, e^{-1}], g(x) \leq n^{-1}\} = [0, x_n]$$

où $x_n \in [0, e^{-1}]$ est caractérisé par $x_n \ln(x_n^{-1}) = g(x_n) = n^{-1}$, ce qui implique

$$n\mu\big(\{x \in [0, e^{-1}], \frac{1}{g(x)} \geq n\}\big) = nx_n = \frac{1}{|\ln x_n|} \longrightarrow 0$$

car $x_n \longrightarrow 0_+$. La propriété (a) peut donc être vérifiée sans que f (ici $1/g$) soit dans $\mathcal{L}^1$.
(b) Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu = \int \Big(\sum_{n\geq 1} n^{-2}|f|^2\mathbf{1}_{\{|f|\leq n\}}\Big) d\mu.$$

Avec

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} n^{-2}|f(x)|^2\mathbf{1}_{\{|f|\leq n\}}(x) = \sum_{n\geq \max(|f(x)|,1)} n^{-2}|f(x)|^2 = |f(x)|^2 \sum_{n\geq \max(|f(x)|,1)} n^{-2}$$

comme pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n\geq N} n^{-2} \leq \min\Big(\frac{\pi^2}{6}, \frac{1}{N-1}\Big),$$

on obtient

$$0 \leq F(x) \leq \min\big(\frac{\pi^2}{6}, \frac{1}{\max(|f(x)|, 1) - 1}\big)|f(x)|^2 \leq \begin{cases} \frac{\pi^2}{6}|f(x)|^2 & \text{si } |f(x)| \leq 2, \\ \frac{|f(x)|^2}{|f(x)|-1} & \text{si } |f(x)| > 2. \end{cases}$$

Comme pour $|f(x)| \leq 2$ on a $\frac{\pi^2}{6}|f(x)|^2 \leq \frac{\pi^2}{6}|f(x)||f(x)| \leq |f(x)|\frac{2\pi^2}{6} \leq 4|f(x)|$ et pour $|f(x)| > 2$,

$$\frac{|f(x)|^2}{|f(x)|-1} = \frac{|f(x)|}{|f(x)|-1}|f(x)| \leq 2|f(x)|,$$

il vient

$$0 \leq F(x) \leq 4|f(x)|$$

ce qui donne le résultat.
La réciproque est fausse car avec $f(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ (qui n'est pas dans $\mathcal{L}^1$), on a néanmoins

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_{|f|\leq n}|f|^2 d\mu = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_{x\geq 1}\frac{1}{x^2}dx = \pi^2/6.$$

Commentaire. On peut également fournir un contre-exemple à la réciproque de (b) pour lequel μ est de masse totale finie (i.e. $\mu(X) < +\infty$) en suivant la construction de (a).

Exercice 3.15.
Déterminer la limite des suites

$$u_n = \sum_{k\geq 1}\frac{n}{nk^2+k+1}, \qquad v_n = \sum_{1\leq k\leq 2n}\frac{n^2}{kn^2+k^2}, \qquad w_n = \sum_{1\leq k\leq n^2}\frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n.$$

Corrigé. On a, pour k entier fixé ≥ 1, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{nk^2+k+1} = \frac{1}{k^2}$ et en outre

$$\frac{n}{nk^2+k+1} = \frac{1}{k^2+(k/n)+(1/n)} \leq \frac{1}{k^2} = F(k), \quad \sum_{k\geq 1}F(k) < \infty.$$

Le théorème de convergence dominée (th.1.6.8) sur l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mu = \sum_{k\geq 1}\delta_k, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ appliqué à la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par $f_n(k) = \frac{n}{nk^2+k+1}$, donne

$$u_n = \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{N}}(\lim_n f_n)d\mu = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En utilisant le même espace mesuré et la suite de fonctions positives $(g_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$g_n(k) = \begin{cases} \frac{n^2}{kn^2+k^2} & \text{pour } 1 \leq k \leq 2n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

il vient du lemme de Fatou (lemme 1.6.4),

$$+\infty = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k} = \int_{\mathbb{N}}\liminf_n g_n d\mu \leq \liminf_n \int_{\mathbb{N}} g_n d\mu = \liminf_n v_n,$$

ce qui donne $\lim_n v_n = +\infty$.
Toujours avec le même espace mesuré et la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$h_n(k) = \begin{cases} \frac{\sin k}{k^2}(\frac{k}{k+1})^n & \text{pour } 1 \leq k \leq n^2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on remarque que $|h_n(k)| \leq F(k)$ où F est définie ci-dessus. Le théorème de convergence dominée (th.1.6.8) donne

$$\lim_n w_n = \int_{\mathbb{N}} (\lim_n h_n) d\mu = \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{\sin k}{k^2} (\frac{k}{k+1})^n \Big) = \sum_{k\geq 1} 0 = 0.$$

Commentaire. Le dernier point peut se vérifier directement (i.e. sans utiliser le théorème de convergence dominée). En effet, pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$|w_n| \leq \sum_{1\leq k\leq m} \frac{1}{k^2}\Big(\frac{m}{m+1}\Big)^n + \sum_{k>m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}\Big(\frac{m}{m+1}\Big)^n + \sum_{k>m} \frac{1}{k^2},$$

et par conséquent

$$\limsup_{n\to+\infty} |w_n| \leq \sum_{k>m} \frac{1}{k^2}, \quad \text{d'où} \quad \limsup_{n\to+\infty} |w_n| \leq \inf_{m\geq 1} \sum_{k>m} \frac{1}{k^2} = 0$$

car $\sum_{k>m} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série convergente.

Exercice 3.16.
Déterminer la limite des suites $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \tanh\Big(\frac{x}{n}\Big)\, dx, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1} dx.$
Corrigé. En posant $f_n(x) = \frac{n}{1+x^2} \tanh\big(\frac{x}{n}\big)$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad |f_n(x)| \leq \frac{x}{1+x^2} \sup_{\alpha>0}(\frac{\tanh\alpha}{\alpha}).$$

Le théorème de convergence dominée implique donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

On a $J_n = \int_0^1 e^{-x}\big(x + \frac{1}{n}\big)^{-1} dx$ et le lemme de Fatou donne, avec $g_n(x) = e^{-x}\big(x + \frac{1}{n}\big)^{-1}$,

$$+\infty = \int_0^1 e^{-x}x^{-1} dx = \int_0^1 \big(\liminf_n g_n(x)\big) dx \leq \liminf_n \int_0^1 g_n(x) dx = \liminf_n J_n.$$

Problème 3.1. Un ensemble non mesurable.
On considère sur [0,1] la relation d'équivalence $\sim$ définie par $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. On rappelle l'énoncé de l'axiome du choix. Soit I un ensemble non vide et soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Alors

$$\forall i \in I, X_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset.$$

Si $X \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on notera $X + t$ l'ensemble $\{x + t\}_{x\in X}$.
a. En utilisant l'axiome du choix, montrer qu'il existe une partie A de [0,1] formée en prenant dans chacune des classes d'équivalence de $\sim$ un élément et un seul.
b. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ une bijection. On pose $A_n = A + \varphi(n)$. Montrer que

$$[0, 1] \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset [-1, 2]$$

c. En déduire qu'il n'existe pas de mesure positive μ définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation, (i.e. telle que $\mu(X) = \mu(X + t)$ pour toute partie X de $\mathbb{R}$ et tout réel t), et telle que $\mu([a, b]) = b - a$ pour $a \leq b$.
d. Montrer que $A \notin \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est la tribu de Lebesgue.

Corrigé. (a) Considérons l'ensemble quotient $[0, 1]/\sim$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence $\{X_i\}_{i\in I}$. Chaque X_i est une classe d'équivalence et est donc non vide. En utilisant l'axiome du choix, on peut trouver une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, 1]$ telle que X_i soit la classe d'équivalence de x_i. Posons $A = \{x_i\}_{i\in I}$.
(b) Remarquons que $\mathbb{Q}\cap[-1, 1]$ est infini dénombrable, donc équipotent à $\mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. Il existe un $i \in I$ tel que $x \sim x_i$, i.e. $x - x_i \in \mathbb{Q}$; par suite $x = x_i + \rho$ avec $\rho \in \mathbb{Q}$ et comme x et x_i appartiennent à $[0, 1]$, $\rho \in [-1, 1]$ et donc, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\rho = \varphi(n)$, ce qui implique $x \in A_n = A + \varphi(n)$. De plus

$$A_n \subset [0, 1] + [-1, 1] \subset [-1, 2].$$

(c) Supposons qu'une telle mesure existe. Remarquons tout d'abord que pour $n \neq m$ entiers naturels, on a $A_n \cap A_m = \emptyset$. En effet si $x \in A_n \cap A_m$, on obtient, avec $i, j \in I$

$$x = x_i + \varphi(n) = x_j + \varphi(m)$$

et donc $x_i \sim x_j$, ce qui implique $x_i = x_j$, puis $\varphi(n) = \varphi(m)$ et donc $m = n$ car φ est injective. On aurait donc

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3,$$

ce qui est impossible, car la première inégalité implique $\mu(A) > 0$ tandis que la seconde implique $\mu(A) = 0$.
(d) Si on avait $A \in \mathcal{L}$, les inégalités précédentes seraient valides pour la mesure de Lebesgue m sur $\mathbb{R}$, aboutissant comme ci-dessus à une contradiction.

Problème 3.2. Théorème d'Egoroff.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) < +\infty$. Soit $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction f.
a. On définit pour $k \geq 1, n$ entiers, l'ensemble

$$E_n^k = \cap_{p \geq n}\{x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq 1/k\}.$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k$.
b. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie mesurable A_ϵ telle que $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$ et telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $X \backslash A_\epsilon$.
c. Montrer que l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ n'est pas superflue.

Corrigé. (a) Soit $x \in X$. On a $\lim_m f_m(x) = f(x)$ et par conséquent, pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier n tel que pour tout $p \geq n$,

$$|f_p(x) - f(x)| \leq 1/k.$$

Ceci exprime exactement que $x \in E_n^k$. Remarquons également que $E_n^k \subset E_{n+1}^k$ et donc (proposition 1.4.2.b) que $\lim_n \mu(E_n^k) = \mu(X)$. Comme $\mu(X) < +\infty$, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que

$$\forall n \geq N_k, \quad \mu(E_n^k) \geq \mu(X) - \epsilon 2^{-k}.$$

On peut supposer par conséquent qu'il existe une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ strictement croissante telle que

$$\mu(E_{n_k}^k) \geq \mu(X) - \epsilon 2^{-k}.$$

Il suffit en effet de définir pour cela $n_k = k - 1 + \max_{1\leq j\leq k} N_j$. On a alors

$$N_k \leq n_k = k - 1 + \max_{1\leq j\leq k} N_j \leq k - 1 + \max_{1\leq j\leq k+1} N_j < k + \max_{1\leq j\leq k+1} N_j = n_{k+1}.$$

(b) Soit $\epsilon > 0$. Posons $F = \cup_{k\geq 1} F_k$ avec $F_k = \left(E_{n_k}^k\right)^c$. On a $\mu(F_k) = \mu(X) - \mu(E_{n_k}^k) \leq \epsilon 2^{-k}$ et donc $\mu(F) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(F_k) \leq \epsilon$. Il vient avec $B = F^c$ et donc $\mu(B^c) \leq \epsilon$,

$$B = \cap_{k\geq 1} F_k^c = \cap_{k\geq 1} E_{n_k}^k,$$

ce qui donne $\sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in E_{n_k}^k} |f_n(x) - f(x)| \leq 1/k \quad$ si $n \geq n_k$. La suite $(\sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0.
(c) Considérons la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et la suite convergeant simplement vers 0. $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x - n)$. Si A est une partie mesurable de mesure de Lebesgue $\leq 1/2$ et f_n converge uniformément sur A^c, on doit avoir

$$0 = \lim_n \big(\sup_{x\in A^c} \mathbf{1}_{[0,1]}(x - n) \big)$$

ce qui implique $A^c \cap [n, n+1] = \emptyset$ pour $n \geq N$, et donc

$$A \supset [n, n+1] \Longrightarrow m(A) \geq 1, \quad \text{contredisant l'hypothèse.}$$

INTEGRATION, Feuille d'exercices 4

Exercice 4.1.
a. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si les séries normalement convergentes sont convergentes (une série de terme général u_n est dite normalement convergente si $\sum \|u_n\| < +\infty$).
b. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $\sum u_n$ une série normalement convergente dans $L^1(\mu)$. Montrer que $\sum u_n(x)$ est convergente $\mu - pp$.
c. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(\mu)$ telle que $\sum_{n\geq 1} \|f_{n+1} - f_n\|_{L^1(\mu)} < +\infty$. Montrer que la suite f_n converge dans $L^1(\mu)$ et $\mu - pp$. Comparer avec l'exercice 3.8.

Corrigé. (a) Supposons tout d'abord que E est complet et considérons une série normalement convergente de terme général u_n. Posons $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} u_k$. On a, pour $p \geq 0$,

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{n<k\leq n+p} u_k\| \leq \sum_{n<k\leq n+p} \|u_k\| \leq \sum_{n<k} \|u_k\| = \epsilon_n.$$

Comme la série numérique $\sum \|u_k\|$ est convergente, on a $\lim_n \epsilon_n = 0$ et la suite (S_n) est de Cauchy donc convergente. Réciproquement, supposons que E est un espace vectoriel normé dans lequel les séries normalement convergentes sont convergentes. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que, pour $n \geq N_\epsilon, m \geq N_\epsilon$,

$$\|u_n - u_m\| \leq \epsilon.$$

En utilisant la propriété de Cauchy, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq 0$

$$\|u_{n_1+p} - u_{n_1}\| \leq 1/2.$$

De même, on peut trouver $n_2 > n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq 0$

$$\|u_{n_2+p} - u_{n_2}\| \leq 1/2^2,$$

et de manière générale, on peut construire une suite croissante d'entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ telle que, pour tout $p \geq 0$,

$$\|u_{n_j+p} - u_{n_j}\| \leq 2^{-j}.$$

La série $\sum_{j\geq 1}(u_{n_{j+1}} - u_{n_j})$ est normalement convergente et donc convergente. Comme

$$\sum_{1\leq j<l} (u_{n_{j+1}} - u_{n_j}) = u_{n_l} - u_{n_1},$$

la suite $(u_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ est convergente. Or c'est une suite extraite d'une suite de Cauchy et cela implique que la suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente: soit w la limite de la suite $(u_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$. On a

$$\|u_n - w\| \leq \|u_n - u_{n_l}\| + \|u_{n_l} - w\|.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $n \geq N_\epsilon$. Comme n_l tend vers l'infini avec l, il vient

$$\|u_n - w\| \leq \limsup_{l \to +\infty} \|u_n - u_{n_l}\| + \limsup_{l \to +\infty} \|u_{n_l} - w\| \leq \epsilon + 0 = \epsilon$$

et la convergence de la suite (u_n).
(b) Comme $L^1(\mu)$ est complet, la série $\sum u_n$ est convergente dans $L^1(\mu)$. De plus, comme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |u_n| d\mu < +\infty,$$

il vient du corollaire 1.6.2 (du théorème de Beppo-Levi) que

$$\int_X \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \Big) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |u_n| d\mu < +\infty,$$

ce qui implique que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est une fonction de $L^1(\mu)$. Par conséquent, cette fonction est finie μ-presque partout, i.e. pour $N \in \mathcal{M}$, avec $\mu(N) = 0$,

$$\forall x \in N^c, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)| < +\infty.$$

Par suite, pour tout x dans N^c, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est convergente.
Commentaire. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $L^1(\mu)$, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge simplement presque partout (lemme 3.2.6). L'extraction est nécéssaire comme le montre l'exercice 3.11. Par ailleurs, si $\lim_n f_n = f$ dans L^1 et la suite (f_n) converge presque partout vers g, alors $g = f$ presque partout. En effet, pour $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$

$$\mu\big(\{x, |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}\big) \leq \mu\big(\{x, |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\big) + \mu\big(\{x, |g(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\big)$$

et par suite

$$\mu\big(\{x, |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}\big) \leq 2\epsilon^{-1} \int_X |f - f_n| d\mu + \mu\big(\{x, |g(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\big),$$

ce qui donne

$$\mu\big(\{x, |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}\big) \leq \limsup_n \mu\big(\{x, |g(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\big) = 0, \text{qed.}$$

(c) La série $\sum_k (f_k - f_{k-1})$ est normalement convergente donc convergente dans L^1 d'après le (a). Comme

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} (f_k - f_{k-1}) = f_n - f_0,$$

la suite (f_n) est convergente dans L^1. De plus, d'après le (b), la série $\sum_k \big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\big)$ est convergente presque partout, i.e. la suite $(f_k(x))$ est convergente presque partout.
Commentaire. La convergence simple presque partout n'est évidemment pas suffisante pour la convergence L^1 comme le montre l'exercice 3.8.

Exercice 4.2.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini s'il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que, pour tout n, $\mu(X_n) < +\infty$ et $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Montrer que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) > 0$.
Corrigé. Supposons d'abord que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini. Considérons

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbf{1}_{X_n}(x)}{2^n\big(\mu(X_n) + 1\big)}.$$

Pour tout $x \in X$, on a $f(x) > 0$ (car x appartient à l'un des X_n) et

$$\int_X |f| d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(X_n)}{2^n\big(\mu(X_n) + 1\big)} \leq 2.$$

Réciproquement, s'il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) > 0$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{x \in X, f(x) > 1/(n+1)\}.$$

On a $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ car pour $x \in X$, $f(x) > 0$ et par conséquent $f(x) > 1/(n+1)$ pour $n \geq E\big(1/f(x)\big)$. Par ailleurs, comme f est positive et dans $\mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\mu(X_n) \leq \int_X (n+1) f d\mu = (n+1) \int_X f d\mu < +\infty.$$

Exercice 4.3.
a. Calculer la limite de la suite $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ pour $n \to +\infty$.
b. Soit $x > 0$. Montrer que la suite

$$I_n(x) = \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t}$$

est bien définie pour $n \geq 1$ et converge lorsque $n \to +\infty$. Donner une expression intégrale pour la limite $I(x)$. Quelle fonction classique reconnaissez-vous ?
c. Montrer que pour $x > 0$ et n entier ≥ 1 on a

$$I_n(x) = n^x \frac{n!}{\displaystyle\prod_{0\leq j\leq n} (x+j)} = n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(*on pourra faire le changement de variable $t = ns$ dans $I_n(x)$, raisonner par récurrence sur n, et faire une intégration par parties*).

Corrigé. (a) Posons $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t)(1 - t/n)^n$. On a, pour $0 < t < n$,

$$\ln(f_n(t)) = n \ln(1 - t/n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -t$$

et par conséquent pour $t \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}$. Par ailleurs, comme

$$\ln(1 + x) \leq x, \quad \text{pour } x > -1,$$

on obtient, pour $0 < t < n$, l'inégalité $n \ln(1 - t/n) \leq -t$ et donc, pour $t \geq 0$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}.$$

Le théorème de convergence dominée donne alors $\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
(b) Pour $x > 0$ la fonction $t \mapsto |t|^{x-1}$ est localement intégrable, ce qui montre que $I_n(x)$ a un sens. En posant $g_n(t) = f_n(t)t^{x-1}$, il vient

$$0 \leq g_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \in L^1, \qquad \lim_n g_n(t) = t^{x-1} e^{-t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

ce qui donne

$$I(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x). \quad \text{(fonction Gamma)}$$

(c) Pour $x > 0$ et n entier ≥ 1, on a

$$I_n(x) = \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t} = n^x \int_0^1 s^{x-1} (1 - s)^n \, ds.$$

Par suite, on a

$$I_1(x) = \int_0^1 s^{x-1} (1 - s) \, ds = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x(x + 1)},$$

et, pour $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
I_{n+1}(x) &= (n+1)^x \int_0^1 s^{x-1}\,(1-s)^{n+1}\,ds \\
&= (n+1)^x \Big(\big[\frac{s^x}{x}(1-s)^{n+1}\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{s^x}{x}(n+1)(1-s)^n(-1)ds \Big) \\
&= x^{-1}(n+1)^{x+1} \int_0^1 s^x(1-s)^n ds \\
&= x^{-1}(n+1)^{x+1} n^{-x-1} n^{x+1} \int_0^1 s^x(1-s)^n ds \\
&= x^{-1}(n+1)^{x+1} n^{-x-1} I_n(x+1) \\
&= x^{-1}(n+1)^{x+1} n^{-x-1} n^{x+1} \frac{n!}{\prod\limits_{0 \leq j \leq n} (x+1+j)} \\
&= (n+1)^x \frac{(n+1)!}{x \prod\limits_{0 \leq j \leq n} (x+1+j)} \\
&= (n+1)^x \frac{(n+1)!}{\prod\limits_{0 \leq j \leq n+1} (x+j)}, \quad \text{qed.}
\end{aligned}
$$

Exercice 4.4.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que $\mu(\{x \in X, f(x) \neq 0\}) > 0$. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$
\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu \qquad \text{et} \qquad J = \{p \in [1, +\infty[, \varphi(p) < +\infty\}.
$$

a. Soient $p_0 \leq p_1$ des éléments de J. Pour $\theta \in [0,1]$, montrer que $p_\theta = (1-\theta)p_0 + \theta p_1$ est élément de J (*on pourra utiliser l'inégalité de Hölder*).
b. Montrer que φ est strictement positive sur J et que $\ln \varphi$ est convexe sur J.
c. On suppose qu'il existe $r_0 \in [1, +\infty[$ tel que $f \in L^{r_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$. Montrer que $f \in L^p(\mu)$ pour $p \in [r_0, +\infty]$. Montrer que

$$
\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}\,.
$$

d. On suppose qu'il existe $r_0 \in [1, +\infty[$ tel que $f \in L^p(\mu)$ pour $p \in [r_0, +\infty[$. Montrer que si $f \notin L^\infty(\mu)$ on a

$$
\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(\mu)} = +\infty.
$$

Corrigé. L'hypothèse $\mu\big(\{|f|>0\}\big)>0$ assure $\varphi(p)>0$ pour tout $p\ge 1$ (sinon $\varphi(p)=0$ donnerait $f=0$ presque partout). Pour $\theta\in]0,1[$, on a en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$0<\varphi(p_\theta)=\int_X \overbrace{|f|^{p_0(1-\theta)}}^{\in L^{\frac{1}{1-\theta}}}\overbrace{|f|^{p_1\theta}}^{\in L^{\frac{1}{\theta}}}d\mu \le \left(\int_X |f|^{p_0}d\mu\right)^{1-\theta}\left(\int_X |f|^{p_1}d\mu\right)^{\theta}=\varphi(p_0)^{1-\theta}\varphi(p_1)^\theta,$$

ce qui fournit (a) et (b).
(c) On a $|f|\le \|f\|_{L^\infty}$ presque partout et donc, pour $p\ge r_0$,

$$\int_X |f|^p d\mu \le \int_X |f|^{r_0}d\mu \|f\|_{L^\infty}^{p-r_0}<+\infty, \qquad 0<\varphi(p)^{1/p}\le \varphi(r_0)^{1/p}\|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{r_0}{p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^\infty}.$$

L'hypothèse sur f assure également que $\|f\|_{L^\infty}>0$ (sinon on aurait $f=0$ presque partout). On peut alors considérer ϵ tel que $0<\epsilon<\|f\|_{L^\infty}$, et remarquer que

$$\int_X |f|^p d\mu \ge \int_{|f|\ge \|f\|_{L^\infty}-\epsilon} |f|^p d\mu \ge \big(\|f\|_{L^\infty}-\epsilon\big)^p \mu\big(\{|f|>\|f\|_{L^\infty}-\epsilon\}\big),$$

ce qui donne

$$\varphi(p)^{1/p}\ge \overbrace{\mu\big(\{|f|>\|f\|_{L^\infty}-\epsilon\}\big)}^{>0}{}^{1/p}(\|f\|_{L^\infty}-\epsilon) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^\infty}-\epsilon,$$

ce qui implique finalement $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p}=\|f\|_{L^\infty}$ car

$$\forall\epsilon>0, \|f\|_{L^\infty}-\epsilon\le \liminf_p \|f\|_{L^p}\le \limsup_p \|f\|_{L^p}\le \|f\|_{L^\infty}.$$

(d) Comme $f\notin L^\infty$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mu\big(\{|f|>n\}\big)>0$ et par conséquent

$$\varphi(p)\ge \int_{|f|>n}|f|^p d\mu \ge n^p\mu\big(\{|f|>n\}\big) \Longrightarrow \|f\|_{L^p}\ge \mu\big(\{|f|>n\}\big)^{1/p}n,$$

ce qui implique $\forall n\in\mathbb{N},\quad \liminf_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p}\ge n$, et donc $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p}=+\infty$.

Exercice 4.5.
Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace de probabilité. Soient f,g des fonctions mesurables de X à valeurs dans $]0,+\infty[$ telles que, pour tout $x\in X$, $f(x)g(x)\ge 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu\ge 1$.
Corrigé. On a

$$1=\mu(X)\le \int_X f^{1/2}g^{1/2}d\mu \le \left(\int_X f d\mu\right)^{1/2}\left(\int_X g d\mu\right)^{1/2}.$$

Exercice 4.6.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X à valeurs réelles. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0.$$

a. Montrer que si f_n tend vers f $\mu - pp$, alors f_n tend vers f en mesure.
b. Si $p \in [1, +\infty]$ et si $f_n, f \in L^p(\mu)$ sont tels que f_n tende vers f dans $L^p(\mu)$, montrer que f_n tend vers f en mesure.

Corrigé. (a) Si la suite (f_n) tend vers f presque partout, il existe $N \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in N^c$, $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Par suite, pour $\epsilon > 0$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_n \mu\big(\{|f_n - f| > \epsilon\}\big) = \lim_n \int_X \mathbf{1}_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} d\mu = 0,$$

car $\mathbf{1}_{\{|f_n-f|>\epsilon\}}(x) = 0$ si $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ et donc la suite $\mathbf{1}_{\{|f_n-f|>\epsilon\}}$ converge simplement vers 0 presque partout et est majorée par 1 qui est dans L^1 car μ est une probabilité.
(b) Si $p < +\infty$ et $\epsilon > 0$, on a

$$\mu\big(\{|f_n - f| > \epsilon\}\big) = \int_X \mathbf{1}_{\{|f_n-f|>\epsilon\}} d\mu \le \epsilon^{-p} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \epsilon^{-p} \|f_n - f\|^p_{L^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $p = +\infty$, on remarque que, pour $\alpha > 0$,

$$\|g\|_{L^\infty(\mu)} \le \alpha \Longrightarrow \mu\big(\{|g| > \alpha\}\big) = 0.$$

Par suite, si $\lim_n \|f_n - f\|_{L^\infty(\mu)} = 0$ et $\epsilon > 0$, on a pour $n \ge N_\epsilon$, $\|f_n - f\|_{L^\infty(\mu)} \le \epsilon$ et donc

$$\mu\big(\{|f_n - f| > \epsilon\}\big) = 0.$$

La suite $\Big(\mu\big(\{|f_n - f| > \epsilon\}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire égale à 0 pour $n \ge N_\epsilon$.
Commentaire. Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré où μ est une mesure positive et si, pour $1 \le p < +\infty$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mu)$, alors cette suite converge en mesure, comme le montrent les inégalités précédentes. Il n'est pas nécessaire de supposer pour cela que $\mu(X) < +\infty$. En revanche l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ est nécessaire au résultat (a), car par exemple la suite f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{n}\mathbf{1}_{[0,n^2]}(x)$ tend vers 0 simplement bien que

$$\mu\big(\{|f_n(x)| > \epsilon\}\big) = \mu\big(\{n^2 \ge x > n\epsilon\}\big) = n^2 - n\epsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On peut noter que cette suite est dans $\cap_{p\ge1} L^p(\mathbb{R})$, bien entendu sans converger dans aucun L^p car cela contredirait l'assertion (b).

Exercice 4.7.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité et $f \in L^\infty(\mu)$ non nulle. On pose $\alpha_n = \|f\|^n_{L^n(\mu)}$. Montrer que α_{n+1}/α_n tend vers $\|f\|_{L^\infty(\mu)}$ (*on pourra utiliser l'exercice 4.4*).
Corrigé. Remarquons tout d'abord que $0 < \alpha_n < +\infty$ car, d'une part

$$\alpha_n \leq \|f\|^n_{L^\infty(\mu)} \mu(X) = \|f\|^n_{L^\infty(\mu)} < +\infty$$

et d'autre part $\alpha_n = 0$ impliquerait $f = 0$ μ-presque partout et donc $f = 0$ dans $L^\infty(\mu)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_{n+1} = \int_X |f|^{n+1} d\mu \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)} \int_X |f|^n d\mu = \|f\|_{L^\infty(\mu)} \alpha_n$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Jensen (théorème 3.1.3), on obtient

$$\alpha_n^{1+\frac{1}{n}} = \left(\int_X |f|^n d\mu\right)^{\frac{n+1}{n}} \leq \int_X (|f|^n)^{\frac{n+1}{n}} d\mu = \alpha_{n+1} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)} \alpha_n,$$

ce qui donne

$$\|f\|_{L^n(\mu)} = \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Or d'après l'exercice 4.4.c, on a $\lim_{n\to+\infty} \|f\|_{L^n(\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}$, et l'encadrement précédent fournit le résultat.
Commentaire. Le même énoncé est vrai pour un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ où μ est une mesure positive et f telle que

$$0 \neq f \in \cap_{p\geq 1} L^p(\mu).$$

On a en effet comme plus haut $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ et

$$\alpha_n = \int_X |f|^n d\mu = \|f\|_{L^1(\mu)} \int_X |f|^{n-1} \frac{|f| d\mu}{\|f\|_{L^1(\mu)}}$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Jensen (théorème 3.1.3), on obtient, avec la mesure de probabilité $d\nu = \frac{|f| d\mu}{\|f\|_{L^1(\mu)}}$

$$\begin{aligned}\alpha_n^{1+\frac{1}{n-1}} = \|f\|^{1+\frac{1}{n-1}}_{L^1(\mu)} \left(\int_X |f|^{n-1} d\nu\right)^{\frac{n}{n-1}} &\leq \|f\|^{\frac{n}{n-1}}_{L^1(\mu)} \int_X |f|^n d\nu \\ &= \|f\|^{\frac{n}{n-1}-1}_{L^1(\mu)} \int_X |f|^{n+1} d\mu = \alpha_{n+1} \|f\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^1(\mu)}\end{aligned}$$

et par suite

$$\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \|f\|^{-\frac{1}{n-1}}_{L^1(\mu)} = \alpha_n^{\frac{1}{n-1}} \|f\|^{-\frac{1}{n-1}}_{L^1(\mu)} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

De l'exercice 4.4.c, il vient $\lim_{n\to+\infty} \|f\|_{L^n(\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}$, et l'encadrement précédent fournit le résultat.

Exercice 4.8.
Soit $p \in [1,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^d$. Pour $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$. Montrer que $\|\tau_h u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}$et que

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^p} = 0.$$

Corrigé. L'égalité des normes L^p est due à la formule de changement de variables pour une translation, i.e. à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue. Soit $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. En considérant le compact $K = \{x+t\}_{x\in \operatorname{supp}\varphi, |t|\le 1}$, pour $|h| \le 1$, on a

$$\|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-h) - \varphi(x)|^p dx \le m(K) \sup_{x\in K} |\varphi(x-h) - \varphi(x)|^p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par continuité uniforme de φ. Il vient

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p} \le \|\tau_h u - \tau_h\varphi\|_{L^p} + \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - u\|_{L^p} = \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p} + 2\|\varphi - u\|_{L^p}$$

et par conséquent, pour toute fonction $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\limsup_{h\to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^p} \le 2\|\varphi - u\|_{L^p},$$

ce qui donne $\limsup_{h\to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^p} \le 2 \inf_{\varphi\in C_c^0(\mathbb{R}^n)} \|\varphi - u\|_{L^p} = 0$, par densité des fonctions $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.

Exercice 4.9.
Pour quelles valeurs de $p \in [1,+\infty]$ les fonctions suivantes sont-elles dans $L^p(\mathbb{R}_+)$?
$f_1(t) = 1/(1+t)$, $f_2(t) = 1/(\sqrt{t}(1+t))$, $f_3(t) = 1/(\sqrt{t}(\ln t)^2 + 1)$, $f_4(t) = t^{-1/2}\sin(t^{-1})$.
Corrigé. On a les équivalences suivantes, justifiées ci-après:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_1(t)|^p dt &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^p} < +\infty && \iff && 1 < p,\\
\int_0^{+\infty} |f_2(t)|^p dt &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{p/2}(1+t)^p} < +\infty && \iff && \frac{2}{3} < p < 2,\\
\int_0^{+\infty} |f_3(t)|^p dt &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{t}(\ln t)^2\right)^p} < +\infty && \iff && 2 \le p,\\
\int_0^{+\infty} |f_4(t)|^p dt &= \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t^{-1})|^p}{t^{p/2}} < +\infty && \iff && p < 2.
\end{aligned}$$

Notons que pour f_3, le carré de la norme L^2 est majoré par

$$e + \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^4} = e + \int_1^{+\infty} s^{-4} ds < +\infty.$$

Comme $t^{p/2}(\ln t)^{2p} \geq 1$ pour $t \geq e$, la puissance p-ième de la norme L^p de f_3 pour $1 \leq p < 2$ est minorée par

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{p/2}(\ln t)^{2p}} = \int_1^{+\infty} e^{s\overbrace{(1-\frac{p}{2})}^{>0}} s^{-2p} ds = +\infty.$$

De plus,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t^{-1})|^p}{t^{p/2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin s|^p}{s^{2-\frac{p}{2}}} ds < +\infty$$

si $2 - \frac{p}{2} > 1$, i.e. si $p < 2$. Par ailleurs, si $p = 2$, le même calcul montre que, pour $\epsilon > 0$,

$$\int_\epsilon^{\epsilon^{-1}} \frac{|\sin(t^{-1})|^p}{t^{p/2}} dt = \int_\epsilon^{\epsilon^{-1}} \frac{\sin^2 s}{s} ds \geq \int_1^{\epsilon^{-1}} \frac{\sin^2 s}{s} ds \underset{\epsilon \to 0_+}{\longrightarrow} +\infty,$$

d'après une variante de l'exercice 1.7.e: on peut remarquer que $\frac{\sin^2 s}{s} = \frac{1-\cos(2s)}{2s}$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2s)}{s} ds$ converge. Par ailleurs, si $p > 2$, $p = 2 + 2\theta$, $\theta > 0$,

$$\int_\epsilon^{\epsilon^{-1}} \frac{|\sin(t^{-1})|^p}{t^{p/2}} dt \geq \int_1^{\epsilon^{-1}} \frac{(\sin s)^{2+2\theta}}{s^{1-\theta}} ds \geq 2^{-2-2\theta} \int_{\{1 \leq s \leq \epsilon^{-1}, |\sin s| \geq 1/2\}} s^{\theta-1} ds \underset{\epsilon \to 0_+}{\longrightarrow} +\infty,$$

car $\sin s \geq 1/2$ sur $\cup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$ et par conséquent

$$\int_{\{1 \leq s \leq \epsilon^{-1}, |\sin s| \geq 1/2\}} s^{\theta-1} ds \geq \frac{1}{\theta} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \epsilon^{-1}}} \left[\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)^\theta - \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)^\theta \right]$$

$$\geq \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \epsilon^{-1}}} \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)^{\theta-1} \underset{\epsilon \to 0_+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 4.10.
Soit $n \geq 1$ entier et f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha}{(|x| + n)^\beta}$, avec $\beta > 1$.
a. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, montrer que $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ et calculer $\|f_n\|_p$.
b. Montrer que g_n définie par $g_n(x) = n^\gamma e^{-n|x|}$ est dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.
c. Déduire de ce qui précède que pour $1 \leq p < q \leq +\infty$ les topologies induites sur $L^p \cap L^q$ par L^p et L^q ne sont pas comparables.

Corrigé. (a) On a, pour $p \geq 1,\ \beta > 1$

$$\|f_n\|_p^p = 2\int_0^{+\infty} \frac{n^{\alpha p}}{(x+n)^{\beta p}}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{n^{(\alpha-\beta)p+1}}{(y+1)^{\beta p}}dy$$
$$= 2n^{(\alpha-\beta)p+1}\left[\frac{(y+1)^{-\beta p+1}}{-\beta p+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{2n^{(\alpha-\beta)p+1}}{\beta p-1}$$

et par conséquent $\|f_n\|_p = 2^{\frac{1}{p}}(\beta p-1)^{-\frac{1}{p}}n^{\alpha-\beta+\frac{1}{p}}$. On a de plus $\|f_n\|_\infty = n^{\alpha-\beta}$.
(b) On a $\|g_n\|_\infty = n^\gamma$ et , pour $p \geq 1$,

$$\|g_n\|_p^p = n^{\gamma p}2\int_0^{+\infty} e^{-npx}dx = \frac{n^{\gamma p}2}{np}, \quad \text{i.e. } \|g_n\|_p = n^{\gamma-\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{p}}p^{-\frac{1}{p}}.$$

(c) Calculons pour $1 \leq p < q \leq +\infty$

$$\frac{\|f_n\|_p}{\|f_n\|_q} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \overbrace{C_1(p,q,\beta)}^{\substack{\text{dépend uniquement}\\ \text{de } p,q,\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
$$\frac{\|g_n\|_p}{\|g_n\|_q} = n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \overbrace{C_2(p,q)}^{\substack{\text{dépend uniquement}\\ \text{de } p,q}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si les topologies induites sur $L^p \cap L^q$ par L^p et L^q étaient comparables, on aurait par exemple pour (φ_n) suite de $L^p \cap L^q$,

$$\lim_{L^p} \varphi_n = 0 \Longrightarrow \lim_{L^q} \varphi_n = 0.$$

Ceci est infirmé par $\varphi_n = n^{-\gamma+\frac{1}{q}}g_n$ car $\lim_n \|\varphi_n\|_p = \lim_n n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}2^{1/p}p^{-1/p} = 0$ tandis que $\|\varphi_n\|_q = 2^{1/q}q^{-1/q} > 0$ indépendant de n (ceci est valable aussi pour $q = +\infty$). On ne peut davantage avoir pour (φ_n) suite de $L^p \cap L^q$,

$$\lim_{L^q} \varphi_n = 0 \Longrightarrow \lim_{L^p} \varphi_n = 0.$$

Ceci est en effet infirmé par $\varphi_n = n^{-\alpha+\beta-\frac{1}{p}}f_n$ car

$$\lim_n \|\varphi_n\|_q = \lim_n n^{-\alpha+\beta-\frac{1}{p}+\alpha-\beta+\frac{1}{q}}2^{1/q}(\beta q-1)^{-1/q} = 0$$

tandis que $\|\varphi_n\|_p = n^{-\alpha+\beta-\frac{1}{p}+\alpha-\beta+\frac{1}{p}}2^{1/p}(\beta p-1)^{-1/p} = 2^{1/p}(\beta p-1)^{-1/p} > 0$ indépendant de n.

Exercice 4.11.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $p, p' \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/p' = 1$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$ si pour tout $g \in L^{p'}(\mu)$,

$$\lim_n \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

a. Montrer que la convergence dans L^p implique la convergence faible.
b. Montrer à l'aide d'un exemple que la réciproque est fausse.

Corrigé. (a) Soit (f_n) une suite de L^p convergeant vers f dans L^p. On a alors, pour tout $g \in L^{p'}$, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\left| \int_X (f_n - f) g d\mu \right| \leq \|f_n - f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) La réciproque est fausse car $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) e^{inx}$ est de norme 1 dans $L^p(\mathbb{R})$ et converge faiblement vers 0, car pour $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$

$$\int_0^1 g(x) e^{inx} dx = \int_0^1 \big(g(x) - \varphi(x)\big) e^{inx} dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{inx} dx.$$

Comme on a $\int \varphi(x) e^{inx} dx = (in)^{-1} \int \varphi(x) \frac{d}{dx}(e^{inx}) dx = (-in)^{-1} \int \varphi'(x) e^{inx} dx$, il vient

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \left| \int_0^1 g(x) e^{inx} dx \right| &\leq \int_0^1 |g(x) - \varphi(x)| dx \\ &\leq \Big(\int_0^1 |g(x) - \varphi(x)|^{p'} dx \Big)^{1/p'} = \|g\mathbf{1}_{[0,1]} - \varphi\|_{L^{p'}} \end{aligned}$$

ceci pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$. Comme ces fonctions forment un ensemble dense de $L^{p'}([0,1])$(théorème 3.4.2: ici $p > 1$ et donc $p' < +\infty$), il vient

$$\inf_{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]} \|g\mathbf{1}_{[0,1]} - \varphi\|_{L^{p'}} = 0$$

et $\lim_n \int_0^1 g(x) e^{inx} dx = 0$.

Commentaire. (1) On peut remarquer également que la suite (e^{inx}) tend vers 0 dans L^∞-faible*, ce qui signifie que, pour toute fonction g de $L^1(\mathbb{R})$, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{inx} dx = 0$: c'est le lemme de Riemann-Lebesgue (lemme 3.4.4).

Commentaire. (2) Donnons un autre contre-exemple. Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$ de norme 1 dans $L^p(\mathbb{R})$; considérons la suite (f_n) de norme 1 dans $L^p(\mathbb{R})$ définie par $f_n(x) = n^{1/p} f(nx)$. Cette suite tend vers 0 faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$, car si $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, on a pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \big(g(x) - \varphi(x)\big) dx + \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y/n) dy n^{\frac{1}{p}-1}$$

ce qui implique, comme $|f(y)\varphi(y/n)dyn^{\frac{1}{p}-1}| \le |f(y)|(\sup|\varphi|)n^{-1/p'}$

$$\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx\right| \le \|g-\varphi\|_{L^{p'}} \Longrightarrow \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = 0.$$

Notons que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ est de norme 1, le résultat est inchangé car, pour $\psi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$f_n(x) = n^{1/p}f(nx) = n^{1/p}\psi(nx) + n^{1/p}f(nx) - n^{1/p}\psi(nx).$$

Pour $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, on a donc

$$\begin{aligned}\limsup_n &\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx\right| \\ &\le \limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)g(x)dx\right| + \limsup_n \int_{\mathbb{R}} n^{-1/p'}|f(y)-\psi(y)||g(y/n)|dy \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le \|g\|_{L^{p'}}\|f-\psi\|_{L^p},\end{aligned}$$

ce qui donne $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = 0$.
Si $p=1$ et f est une fonction de L^1 d'intégrale 1, la suite $f_n(x) = nf(nx)$ ne tend pas vers 0 faiblement: en particulier si $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = g(0). \tag{e4.11.1}$$

En effet, la fonction f_n est aussi dans L^1 et d'intégrale 1 et

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx - g(0) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\big(g(x)-g(0)\big)dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\big(g(y/n)-g(0)\big)dy.$$

Comme $|f(y)\big(g(y/n)-g(0)\big)| \le |f(y)|2\sup|g|$, et, par continuité de g en 0,

$$\lim_n f(y)\big(g(y/n)-g(0)\big) = 0,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne le résultat (e4.11.1).
Commentaire. (3) Un autre contre-exemple est donné par $f_n(x) = f(x-n)$ où $f \in L^p(\mathbb{R})$ de norme 1. Chaque f_n est de norme 1 dans L^p et néanmoins pour $g \in L^{p'}$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, on a, pour $A>0$ fixé

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\big(g(y+n)-\varphi(y+n)\big)dy + \int_{\{|y|\le A\}} f(y)\varphi(y+n)dy + \int_{\{|y|>A\}} f(y)\varphi(y+n)dy,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx \right| \le \|g - \varphi\|_{L^{p'}} + \limsup_n \int_{\{|y|>A\}} |f(y)||\varphi(y+n)|dy$$
$$\le \|g - \varphi\|_{L^{p'}} + \left(\int_{\{|y|>A\}} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} .$$

En prenant l'infimum par rapport à A du membre de droite, il vient

$$\limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx \right| \le \|g - \varphi\|_{L^{p'}}, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}),$$

ce qui donne $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = 0$.

Exercice 4.12.
Soit μ une mesure positive définie sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ et telle que $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. On pose $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(t)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si

$$\frac{1}{h^2}\Big(2f(0) - f(h) - f(-h)\Big)$$

possède une limite lorsque h tend vers 0, alors $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu(t) < +\infty$ et f est de classe C^2.
Corrigé. Soit (x_k) une suite convergente de réels de limite x. On a, en utilisant $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$,

$$|e^{itx_k} - e^{itx}| \le 2 \in L^1(\mu), \quad \text{et } \lim_k e^{itx_k} = e^{itx},$$

et le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne $\lim_k f(x_k) = f(x)$. Remarquons que

$$\frac{1}{h^2}\Big(2f(0) - f(h) - f(-h)\Big) = h^{-2} \int_{\mathbb{R}} (2 - 2\cos th) d\mu(t) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} L.$$

D'après le <u>lemme de Fatou</u>, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{h\to 0} \big(h^{-2}|2 - 2\cos th|\big) d\mu(t)$$
$$\le \liminf_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \big(h^{-2}|\underbrace{2 - 2\cos th}_{\ge 0}|\big) d\mu(t) = \liminf_{h\to 0} h^{-2} \int_{\mathbb{R}} (2 - 2\cos th) d\mu(t) = L,$$

et comme

$$\lim_{h\to 0} h^{-2}(2 - 2\cos th) = \lim_{h\to 0} h^{-2}\big(2 - 2[1 - 2\sin^2(th/2)]\big) = \lim_{h\to 0} \frac{4\sin^2(th/2)}{h^2} = t^2,$$

il vient

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu(t) \leq L < +\infty. \tag{e4.12.1}$$

Notons incidemment que ceci implique que

$$\int_{\mathbb{R}} |t| d\mu(t) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu(t) \right)^{1/2} \mu(\mathbb{R})^{1/2} = \big(L\mu(\mathbb{R}) \big)^{1/2} < +\infty.$$

Le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (théorème 3.3.2) donne f deux fois différentiable et

$$f''(x) = -\int_{\mathbb{R}} e^{itx} t^2 d\mu(t).$$

Cette formule et la condition (e4.12.1) permettent d'assurer la continuité de f'', en utilisant le théorème 3.3.1 sur la continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Exercice 4.13.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désigne par J l'intérieur de I. Soit $[a, b] \subset J$ et $a < x_1 < x_2 < b$. Montrer que

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(a)}{x_1 - a}(x_2 - a) + \varphi(a) \leq \varphi(x_2) \leq \varphi(b) - (b - x_2)\frac{\varphi(b) - \varphi(x_1)}{b - x_1}.$$

En déduire que φ est continue sur J. Donner un exemple de fonction convexe définie sur $[0, 1]$ et continue seulement sur]0,1[.

Corrigé. Pour la continuité de φ, voir la proposition 3.1.2(d) dans les notes de cours. Par ailleurs, la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1[, \end{cases}$$

est convexe sur $[0, 1]$: la propriété (3.1.1) est vérifiée pour $\theta \in]0, 1[$ si $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$ car alors $x_\theta \in]0, 1[$; par ailleurs (3.1.1) est toujours vérifiée pour $\theta \in \{0, 1\}$ et pour $x_0 = x_1$.

Exercice 4.14.
a. On pose ($\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^d$)

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp - \left(\frac{1}{1 - \|x\|^2} \right) & \text{pour } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que ρ est indéfiniment différentiable à support égal à la boule unité fermée. Montrer que ρ n'est pas analytique.

b. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K un compact inclus dans Ω. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, [0,1])$ telle que $\varphi_{|K} = 1$.

Corrigé. Considérons pour commencer la fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{pour } t > 0, \\ 0 & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

Montrons que cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout entier $k \geq 0$, pour $t > 0$,

$$\psi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}, \tag{e4.14.1}$$

où P_k est un polynôme normalisé de degré $2k$. C'est vrai pour $k = 0$ et en supposant (e4.14.1) vrai pour un entier $k \geq 0$, il vient

$$\psi^{(k+1)}(t) = \big(-t^{-2}P_k'(t^{-1}) + t^{-2}P_k(t^{-1})\big)e^{-t^{-1}} = P_{k+1}(t^{-1})e^{-t^{-1}},$$

avec $P_{k+1}(T) = T^2P_k(T) - T^2P_k'(T)$. Le terme de plus haut degré de P_k est T^{2k} et le degré de P_k' est $2k-1$; par conséquent le terme de plus haut degré de P_{k+1} est T^{2k+2}, ce qui démontre par récurrence sur k la propriété (e4.14.1). Démontrons maintenant par récurrence sur k que la fonction ψ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que

$$\psi^{(k)}(t) = \begin{cases} P_k(1/t)e^{-1/t} & \text{pour } t > 0, \\ 0 & \text{pour } t \leq 0. \end{cases} \tag{e4.14.2}$$

C'est vrai pour $k = 0$ car $\lim_{t\to 0_+} e^{-1/t} = 0$ et en supposant ceci vérifié pour un entier $k \geq 0$, on trouve que $\psi^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec la formule demandée pour $\psi^{(k+1)}$. Il reste à vérifier la dérivabilité de $\psi^{(k)}$ en 0 et $\psi^{(k+1)}(0) = 0$: on calcule pour $t \neq 0$,

$$t^{-1}\big(\psi^{(k)}(t) - \psi^{(k)}(0)\big) = \begin{cases} t^{-1}P_k(t^{-1})e^{-t^{-1}}, & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\lim_{t\to 0_+} t^{-1}P_k(t^{-1})e^{-t^{-1}} = 0$, il vient $\psi^{(k+1)}(0) = 0$. La continuité de $\psi^{(k+1)}$ est assurée par la formule (e4.14.1) déjà démontrée. Finalement, la fonction ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ de support $\mathbb{R}_+$ et telle que, pour tout entier k, $\psi^{(k)}(0) = 0$.

La fonction ρ de l'énoncé vérifie

$$\rho(x) = \psi(1 - \|x\|^2).$$

Comme composée de fonctions C^∞, ρ est C^∞. De plus, $\rho(x) \neq 0$ équivaut à $1 - \|x\|^2 > 0$, i.e. $\|x\| < 1$. Par suite,

$$\operatorname{supp}\rho = \overline{\{x, \rho(x) \neq 0\}} = B_1, \qquad \text{la boule unité euclidienne fermée.}$$

Si $\|x_0\| = 1$, on a $\partial_x^\alpha \rho(x_0) = 0$ pour tout multi-indice α car ψ est plate en 0 (i.e. $\psi^{(k)}(0) = 0$ pour tout k). Le développement de Taylor de ρ est donc identiquement nul en x_0. Par suite, la fonction ρ n'est pas analytique au voisinage de x_0 sinon, elle serait identiquement nulle sur un voisinage de x_0, ce qui n'est pas car $x_0 \in \operatorname{supp} \rho$.
(b) Comme K est compact $\subset \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, la formule (2.1.3) des notes de cours assure que $\epsilon_0 = d(K, \Omega^c) > 0$, et par suite les compacts

$$K'' = K + \frac{\epsilon_0}{4} B_1 \subset K' = K + \frac{\epsilon_0}{2} B_1 \subset \Omega.$$

Posons, pour $\epsilon_1 = \epsilon_0/4$, $\rho_0 = \rho / \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t)dt$

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{K''}(y) \rho_0\big(\frac{x-y}{\epsilon_1}\big) \frac{dy}{\epsilon_1^d} = \int_{\{y, |y-K| \le \epsilon_1 \text{ et } |x-y| < \epsilon_1\}} \rho_0\big(\frac{x-y}{\epsilon_1}\big) \frac{dy}{\epsilon_1^d}.$$

D'après le théorème 3.3.2, la fonction φ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. De plus, si $x \notin K'$ et $|x - y| < \epsilon_1$,

$$\forall \theta \in K, \quad |y - \theta = y - x + x - \theta| \ge |x - \theta| - |y - x|$$

ce qui implique $|y - K| \ge |x - K| - |y - x| > \frac{\epsilon_0}{2} - \frac{\epsilon_0}{4} = \frac{\epsilon_0}{4}$ et donc $\varphi(x) = 0$. Par suite, $\operatorname{supp} \varphi \subset K' \subset \Omega$. En outre, si $x \in K$, pour $y \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|y - x| < \epsilon_1$, on a également

$$|y - K| < \epsilon_1$$

ce qui implique que

$$\varphi(x) = \int_{\substack{\{y, |y-K| \le \epsilon_1 \\ \text{et } |x-y| < \epsilon_1\}}} \rho_0\big(\frac{x-y}{\epsilon_1}\big) \frac{dy}{\epsilon_1^d} = \int_{\{y, |x-y| < \epsilon_1\}} \rho_0\big(\frac{x-y}{\epsilon_1}\big) \frac{dy}{\epsilon_1^d} = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0\big(\frac{x-y}{\epsilon_1}\big) \frac{dy}{\epsilon_1^d} = 1,$$

et $\varphi_{|K} = 1$, qed.

INTEGRATION, Feuille d'exercices 5

Exercice 5.1.
a. Soit φ une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0,1]$ avec $\sum_{1\le j\le n} \theta_j = 1$. Montrer que

$$\varphi(\sum_{1\le j\le n} \theta_j x_j) \le \sum_{1\le j\le n} \theta_j \varphi(x_j).$$

b. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels > 0 et $\theta_1, \dots, \theta_n$ comme ci-dessus. Montrer l'inégalité *arithmético-géométrique*

$$\prod_{1\le j\le n} x_j^{\theta_j} \le \sum_{1\le j\le n} \theta_j x_j.$$

Corrigé. cf. la remarque 3.1.4 dans les notes de cours.

Exercice 5.2.
Montrer que $l^\infty(\mathbb{N})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$ ne sont pas séparables (*on pourra raisonner par l'absurde*).

Corrigé. Supposons que $l^\infty(\mathbb{N})$ contienne une partie dénombrable dense $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Chaque élément x_n est une suite bornée $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, i.e. telle que $\sup_{k\ge 0} |x_{n,k}| = \|x_n\|_{l^\infty(\mathbb{N})} < +\infty$. L'inégalité triangulaire implique que

$$2 \le |1 + x_{0,0}| + |1 - x_{0,0}| \le 2\max\big(|1 + x_{0,0}|, |1 - x_{0,0}|\big) = 2\max\big(|-1 - x_{0,0}|, |1 - x_{0,0}|\big)$$

et par conséquent, $\max\big(|-1 - x_{0,0}|, |1 - x_{0,0}|\big) \ge 1$. On peut donc trouver $y_0 \in \{-1, 1\}$ tel que $|y_0 - x_{0,0}| \ge 1$. Supposons construits $y_0, \dots, y_k \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\forall l \in \{0, \dots, k\}, \quad |y_l - x_{l,l}| \ge 1.$$

Comme précédemment, on peut trouver $y_{k+1} \in \{-1, 1\}$ tel que $|y_{k+1} - x_{k+1,k+1}| \ge 1$. Nous avons donc construit une suite $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, |y_k| = 1$ (et donc cette suite est dans $l^\infty(\mathbb{N})$) telle que

$$\|y - x_n\|_{l^\infty(\mathbb{N})} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_{n,k}| \ge |y_n - x_{n,n}| \ge 1,$$

ce qui contredit la densité de la partie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une partie dénombrable de $L^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\mathbb{R} = \cup_{m\in\mathbb{Z}} I_m, \quad I_m = [m, m+1[.$$

L'inégalité triangulaire implique

$$2 \le \|1+\varphi_n\|_{L^\infty(I_n)} + \|1-\varphi_n\|_{L^\infty(I_n)} \le 2\max\bigl(\|-1-\varphi_n\|_{L^\infty(I_n)}, \|1-\varphi_n\|_{L^\infty(I_n)}\bigr).$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut donc trouver une constante $\theta_n \in \{-1,1\}$, telle que

$$\|\theta_n - \varphi_n\|_{L^\infty(I_n)} \ge 1.$$

La fonction

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n \mathbf{1}_{I_n}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N},\theta_n=1} \mathbf{1}_{I_n}(x) - \sum_{n\in\mathbb{N},\theta_n=-1} \mathbf{1}_{I_n}(x)$$

appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$ et est de norme 1 (la mesurabilité de ψ est due au fait que ψ prend deux valeurs $-1, 1$ et que $\psi^{-1}(\{1\})$ et $\psi^{-1}(\{-1\})$ sont des réunions dénombrables d'intervalles). De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\|\psi - \varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ge \|\psi - \varphi_n\|_{L^\infty(I_n)} = \|\theta_n - \varphi_n\|_{L^\infty(I_n)} \ge 1,$$

ce qui rend impossible la densité de la partie $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 5.3.
Soient n un entier ≥ 1 et $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. On définit le *support* de u, noté $\operatorname{supp} u$, par

$$\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ il n'existe pas de voisinage ouvert } V \text{ de } x \text{ tel que } u = 0 \text{ pp sur } V\}.$$

Montrer que le support de u est un fermé et que, si u est continue

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, u(x) \ne 0\}}.$$

Montrer par un exemple que cette dernière définition serait absurde pour une fonction de L^1.
Corrigé. On a donc

$$(\operatorname{supp} u)^c = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists V \text{ voisinage ouvert de } x \text{ tel que } u = 0 \text{ pp sur } V\},$$

et $(\operatorname{supp} u)^c$ est donc la réunion des ouverts Ω tels que $u_{|\Omega} = 0$ pp. C'est donc aussi un ouvert. Si u est une fonction continue, montrons que

$$(\operatorname{supp} u)^c = \text{intérieur}\bigl(\{x \in \mathbb{R}^n, u(x) = 0\}\bigr) \tag{e5.3.1}$$

Soit $x_0 \notin \operatorname{supp} u$, alors u est nulle presque partout sur un voisinage ouvert V_0 de x_0 et $\int_{V_0} |u(x)|dx = 0$, ce qui implique que u est identiquement nulle sur V_0 (car u est continue). Réciproquement si x_0 appartient à l'intérieur de $\{u(x) = 0\}$, il existe un ouvert

$V_0 \subset \{u(x) = 0\}$ tel que $x_0 \in V_0$, ce qui donne $u = 0$ sur V_0 et donc pp sur V_0, établissant (e5.3.1). Maintenant, on obtient pour u continue, en utilisant (1.2.1)

$$\operatorname{supp} u = \Big(\text{intérieur}\big(\{x \in \mathbb{R}^n, u(x) = 0\}\big)\Big)^c = \text{adhérence}\Big(\{x \in \mathbb{R}^n, u(x) = 0\}^c\Big)$$
$$= \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, u(x) \neq 0\}}.$$

La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est nulle presque partout et son support est donc vide. Néanmoins, l'ensemble où elle est non nulle est $\mathbb{Q}$ dont l'adhérence est $\mathbb{R}$.

Exercice 5.4.
a. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. On considère

$$S = \{s : X \to \mathbb{C},\ \text{mesurable, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, } \mu(\{s \neq 0\}) < +\infty\}.$$

Montrer que, pour $1 \leq p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.
b. Montrer que, pour $1 \leq p < +\infty$, $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
c. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $1 \leq p < +\infty$, $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
d. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$ (cf.exercice 4.14). Pour $\epsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \frac{dy}{\epsilon^n}.$$

Montrer que cela a un sens et que $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
e. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que, pour $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a $u_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\lim_{\epsilon \to 0_+} u_\epsilon = u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
f. On remplace ρ dans (d) par $e^{-\pi|x|^2}$ où $|x|$ est la norme euclidienne. Montrer que, pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, u_ϵ est analytique et $\lim_{\epsilon \to 0_+} u_\epsilon = u$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. En supposant $u \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, montrer que cette méthode permet de prouver le théorème de Stone-Weierstrass.

Corrigé. Pour la question (a) nous renvoyons le lecteur à la proposition 3.2.7 et au th. 3.4.1 pour les questions (b,c). La question (d) est une conséquence de la proposition 6.1.2. Traitons la question (e). D'après la question (d), nous savons que $u_\epsilon = \rho_\epsilon * u$ a un sens et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ici $\rho_\epsilon(t) = \rho(t\epsilon^{-1})\epsilon^{-n}$). Notons que l'inégalité de Jensen (théorème 3.1.3) implique pour $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|\rho_\epsilon * u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x-y) u(y) dy \right|^p dx$$
$$\leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x-y) |u(y)|^p dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy = \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ce qui donne $u_\epsilon \in L^p$. De plus, en réutilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(u * \rho_\epsilon)(x) - u(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Big(u(x - \epsilon t) - u(x)\Big) \rho(t) dt \right|^p dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - \epsilon t) - u(x)|^p \rho(t) dt dx = \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{\epsilon t} u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rho(t) dt.$$

L'exercice 4.8 donne la convergence simple vers 0 de $\|\tau_{\epsilon t}u - u\|_{L^p}^p \rho(t)$ qui est dominée par $2^p \|u\|_{L^p}^p \rho(t) \in L^1$ et l'on obtient $\lim_{\epsilon\to 0} \|u * \rho_\epsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$.
Question (f). On a alors

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x-t|^2\epsilon^{-2}} u(t)\epsilon^{-n} dt$$

et pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $u_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (et même $\|u_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ en utilisant la preuve précédente ou bien la proposition 6.1.5). On peut prolonger la fonction u_ϵ à $\mathbb{C}^n$ en posant pour $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$u_\epsilon(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \sum_{j=1}^n (z_j - t_j)^2 \epsilon^{-2}} u(t)\epsilon^{-n} dt. \tag{e5.4.1}$$

La convergence de l'intégrale est assurée par l'égalité

$$|e^{-\pi \sum_{j=1}^n (z_j-t_j)^2\epsilon^{-2}}| = e^{-\pi|x-t|^2\epsilon^{-2}} e^{\pi\epsilon^{-2}y^2}.$$

Le théorème 3.3.3 fournit l'holomorphie sur $\mathbb{C}^n$ de la fonction définie par (e5.4.1) et donc l'analyticité sur $\mathbb{R}^n$. La convergence dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ de u_ϵ se démontre comme dans la question précédente. Considérons maintenant une fonction $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ et

$$\varphi_\epsilon(x) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x-t|^2\epsilon^{-2}} \big(\varphi(t) - \varphi(x)\big)\epsilon^{-n} dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|t|^2} \big(\varphi(x-\epsilon t) - \varphi(x)\big) dt.$$

On a donc, pour un paramètre $A > 0$,

$$|\varphi_\epsilon(x) - \varphi(x)| \le \int_{|t|\le A} |\varphi(x-\epsilon t) - \varphi(x)| dt + 2\|\varphi\|_{L^\infty} \int_{|t|>A} e^{-\pi|t|^2} dt,$$

et par suite

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_\epsilon(x) - \varphi(x)| \le \frac{A^n|S^{n-1}|}{n} \sup_{|x_1-x_2|\le\epsilon A} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + 2\|\varphi\|_{L^\infty} \int_{|t|>A} e^{-\pi|t|^2} dt.$$

Par continuité uniforme de la fonction φ, on obtient pour tout $A > 0$

$$\limsup_{\epsilon\to 0_+} \|\varphi_\epsilon - \varphi\|_{L^\infty} \le 2\|\varphi\|_{L^\infty} \int_{|t|>A} e^{-\pi|t|^2} dt,$$

et en prenant la limite lorsque $A \to +\infty$, on obtient $\lim_{\epsilon\to 0_+} \|\varphi_\epsilon - \varphi\|_{L^\infty} = 0$. Par conséquent la fonction φ est limite uniforme d'une suite de fonctions analytiques, restrictions à $\mathbb{R}^n$ de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, i.e. de fonctions dites entières. Le rayon de convergence des séries entières définissant ces fonctions holomorphes est infini et par conséquent ces fonctions sont limites uniformes sur tout compact de fonctions polynômes.

Exercice 5.5.
Une conséquence des exercices précédents est que, pour $1 \le p < +\infty$, le complété de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ pour la norme L^p est l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que le complété de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ pour la norme L^∞ est $C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Corrigé. Soit E l'adhérence dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ et $u \in E$. La fonction u est limite uniforme d'une suite de fonctions $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi_k \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Comme

$$|u(x)| \le |u(x) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x)| \le \|u - \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + |\varphi_k(x)|,$$

on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{|x|\to+\infty} |u(x)| \le \|u - \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui implique $\limsup_{|x|\to+\infty} |u(x)| = 0$. En outre la fonction u est continue comme limite uniforme de fonctions continues et l'on obtient $u \in C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$. Réciproquement si $u \in C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ et si $\chi \in C_c^0(\mathbb{R}^n; [0,1])$ vaut 1 sur la boule de rayon 1, considérons pour $k \ge 1$ la fonction de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\varphi_k(x) = u(x)\chi(x/k).$$

On a $|u(x) - \varphi_k(x)| \le |u(x)|\mathbf{1}_{|x|\ge k}$ et

$$\|u - \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \sup_{|x|\ge k} |u(x)| = \epsilon_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

Ceci implique que $u \in E$ et finalement $E = C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 5.6. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*
Soit u une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$. On pose, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx, \qquad \text{avec} \qquad x\cdot\xi = \sum_{1\le j\le n} x_j \xi_j.$$

On dira que $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de u.
a. Montrer que, si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u}$ est bien définie et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
b. Montrer que, si $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{u}$ est C^∞ et vérifie pour tous les $\alpha_1, \dots, \alpha_n, N$ entiers naturels

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |(\partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\alpha_n} \hat{u})(\xi)|(1 + |\xi|)^N < +\infty.$$

On pourra intégrer par parties en remarquant que

$$\Big(1 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{1\le j\le n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big)(e^{-2i\pi x\cdot\xi}) = (1 + |\xi|^2) e^{-2i\pi x\cdot\xi}.$$

c. Montrer que si u appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie $\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{u}(\xi) = 0$. *On pourra remarquer que pour* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*,*

$$|\hat{u}(\xi)| \le \|u - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\hat{\varphi}(\xi)|,$$

puis prendre la limsup lorsque $|\xi|$ *tend vers l'infini.*

Corrigé. Cet exercice est traité dans le lemme 3.4.4 des notes de cours.

Exercice 5.7.
Soit $\mathcal{L}$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En considérant un ensemble du type $\{a\} \times B$, où $B \subset \mathbb{R}, B \notin \mathcal{L}$, montrer que la tribu $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ n'est pas complète.

Corrigé. Rappelons que le problème 3.1(d) (corrigé ci-dessus) fournit un exemple d'une partie de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable. On a, avec m_2 mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$\{a\} \times B \subset \{a\} \times \mathbb{R}, \quad m_2\big(\{a\} \times \mathbb{R}\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_2\big(\{a\} \times [k, k+1[\big) = 0.$$

Néanmoins $\{a\} \times B$ n'appartient pas à $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$, sinon, d'après la proposition 4.1.3(b),

$$\mathcal{L} \ni \big(\{a\} \times B\big)(a, \cdot) = \{x_2 \in \mathbb{R}, (a, x_2) \in \{a\} \times B\} = B,$$

ce qui contredit l'hypothèse $B \notin \mathcal{L}$.

Exercice 5.8.
Pour $t \in \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, on pose $(\tau_t u)(x) = u(x - t)$. Montrer que pour $1 \le p \le +\infty$, $\|\tau_t u\|_{L^p(\mu)} = \|u\|_{L^p(\mu)}$. Montrer que pour $1 \le p < +\infty$, $\lim_{t\to 0} \|\tau_t u - u\|_{L^p(\mu)} = 0$.

Corrigé. C'est l'exercice 4.8.

Exercice 5.9.
On pose $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}\}$. Montrer que E ne peut contenir aucun ensemble du type $A_1 \times A_2$ avec A_1, A_2 mesurables et de mesure strictement positive. *On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction*

$$\varphi(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_1}(x_1 + x_2)\mathbf{1}_{A_2}(x_2)dx_2,$$

dont on démontrera qu'elle est continue. On considérera alors un point x_1 *tel que* $\varphi(x_1) > 0$*, puis on prouvera que* $x_1 \in A_1 - A_2$*. On en déduira que* $\{\varphi > 0\} \subset \mathbb{Q}^c$*, ce qui est absurde pour une fonction continue non identiquement nulle.*

Corrigé. Suivons à la lettre les recommandations et les notations de l'indication en italique. Nous pouvons supposer

$$0 < m(A_j) < +\infty, \quad \text{pour } j = 1, 2.$$

La fonction φ est continue car, avec les notations de l'exercice 5.8

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}}\big[\tau_{-x-h}(\mathbf{1}_{A_1})-\tau_{-x}(\mathbf{1}_{A_1})\big](y)\mathbf{1}_{A_2}(y)dy$$

et par conséquent, comme $\tau_{-x}(\mathbf{1}_{A_1})\in L^1(\mathbb{R}^n)$, l'exercice 5.8 donne

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\le\big\|\tau_{-h}\big(\tau_{-x}(\mathbf{1}_{A_1})\big)-\tau_{-x}(\mathbf{1}_{A_1})\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

La fonction φ est donc continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(x_1)dx_1=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathbf{1}_{A_1}(x_1+x_2)\mathbf{1}_{A_2}(x_2)dx_2dx_1=m(A_1)m(A_2)\in\mathbb{R}_+^*.$$

Il existe donc $x_1\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_1)>0$; on a alors nécessairement $x_1\in A_1-A_2$, sinon

$$\forall x_2\in A_2,\quad x_1+x_2\notin A_1,$$

ce qui implique $\mathbf{1}_{A_1}(x_1+x_2)\mathbf{1}_{A_2}(x_2)=0$ pour tout $x_2\in\mathbb{R}$ et donc $\varphi(x_1)=0$. On a donc obtenu que

$$\emptyset\ne\{\varphi>0\}\subset A_1-A_2.$$

Par ailleurs, on a $(A_1-A_2)\cap\mathbb{Q}=\emptyset$, sinon

$$\exists x_1\in A_1,\exists x_2\in A_2,x_1-x_2\in\mathbb{Q}\Longrightarrow(x_1,x_2)\notin E$$

ce qui contredit $A_1\times A_2\subset E$. Nous avons donc prouvé que $A_1-A_2\subset\mathbb{Q}^c$ et donc

$$\emptyset\ne\{\varphi>0\}\subset\mathbb{Q}^c.$$

Or l'ouvert non vide $\{\varphi>0\}$ contient un intervalle ouvert non vide $]a,b[, a<b$; la densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ implique que $]a,b[\cap\mathbb{Q}\ne\emptyset$.

Exercice 5.10.
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\ne 0\\ 0 & \text{si } (x,y)=0\end{cases},\qquad f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y)\ne 0\\ 0 & \text{si } (x,y)=0.\end{cases}$$

Calculer pour $j=1,2$,

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f_j(x,y)dy\right)dx,\qquad\int_0^1\left(\int_0^1 f_j(x,y)dx\right)dy.$$

Quelles réflexions cela vous inspire-t-il ?

Corrigé. La fonction f_1 est mesurable bornée car

$$f_1(x,y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}}(x,y)R(x,y)$$

où R est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, telle que $|R(x,y)| \leq 1$. Par suite si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0,

$$f_1^{-1}(\Omega) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, R(x,y) \in \Omega\} = R^{-1}(\Omega)$$

et $R^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si Ω contient 0

$$f_1^{-1}(\Omega) = R^{-1}(\Omega) \cup \{(0,0)\}, \quad \text{union d'un ouvert et d'un fermé donc borélien.}$$

Calculons pour $y > 0$,

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx = \int_0^1 \Big(1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\Big)dx = 1 - 2y^2\frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y} = 1 - 2y\arctan(1/y).$$

Notons que la fonction $y \mapsto y\arctan(1/y)$ est continue sur $[0,1]$ et $\lim_{y\to 0_+} y\arctan(1/y) = 0$. Calculons

$$\int_0^1 \big(1 - \underbrace{2y}_{u'(y)}\underbrace{\arctan(1/y)}_{v(y)}\big)dy = 1 - \Big([y^2\arctan(1/y)]_0^1 - \int_0^1 y^2\frac{1}{1+y^{-2}}(-y^{-2})dy\Big)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}dy = 1 - \frac{\pi}{4} - 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = 0.$$

La calcul de $\int_0^1 \Big(\int_0^1 f_1(x,y)dy\Big)\,dx$ est identique. On aurait pu remarquer dès le début que, la fonction f_1 étant localement intégrable, on a

$$I_1 = \iint_{[0,1]\times[0,1]} f_1(x,y)dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} f_1(y,x)dxdy = -\iint_{[0,1]\times[0,1]} f_1(x,y)dxdy = -I_1,$$

(la seconde égalité provient du changement de variables $(x,y) \mapsto (y,x)$) et donc $I_1 = 0$. Les hypothèses du théorème de Fubini sont vérifiées et l'intégrale double I_1 est bien la succession d'intégrales simples de l'énoncé.

Il en va tout autrement pour f_2, fonction pour laquelle la manipulation ci-dessus n'est pas valide, bien que $f_2(x,y) = -f_2(y,x)$. La fonction f_2 est mesurable, pour les mêmes raisons que f_1. Néanmoins elle n'est pas localement intégrable au voisinage de 0 car le passage en coordonnées polaires donne

$$|f_2(x,y)|dxdy = |\cos\theta - \sin\theta|r^{-1}drd\theta.$$

Effectuons le calcul pour $y > 0$ de

$$\begin{aligned}
J(y) = \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx &= \left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right]_1^0 - y\int_0^1 (x^2+y^2)^{-3/2}dx \\
&= y^{-1} - (1+y^2)^{-1/2} - y\Big[(x^2+y^2)^{-1/2}xy^{-2}\Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= y^{-1} - (1+y^2)^{-1/2} - y^{-1}(1+y^2)^{-1/2} \\
&= (1+y^2)^{-1/2}\left(-1 + \frac{(1+y^2)^{1/2}-1}{y}\right) \\
&= (1+y^2)^{-1/2}\left(-1 + \frac{y}{\left((1+y^2)^{1/2}+1\right)}\right).
\end{aligned}$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\int_0^1 J(y)dy &= -\int_0^1 (1+y^2)^{-1/2}dy + \int_0^1 \frac{y}{1+y^2+(1+y^2)^{1/2}}dy \\
&= \left[\ln(y+(1+y^2)^{1/2})\right]_1^0 + \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \frac{\sinh t}{1+\sinh^2 t + (1+\sinh^2 t)^{1/2}}\cosh t dt \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \frac{\sinh t}{\cosh^2 t + \cosh t}\cosh t dt \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \frac{\sinh t}{\cosh t + 1} dt \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \left[\ln(\cosh t + 1)\right]_0^{\sinh^{-1}(1)} \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \left[\ln(\cosh t + 1)\right]_0^{\sinh^{-1}(1)}, \text{ et comme } \sinh^{-1}(1) = \ln(1+\sqrt{2}), \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \ln\Big(\cosh\big(\ln(1+\sqrt{2})\big) + 1\Big) - \ln 2 \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \ln\Big(\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\sqrt{2}} + 1\Big) - \ln 2 \\
&= -\ln(1+\sqrt{2}) + \ln\big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + 1\big) - \ln 2 = -\ln 2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Si pour $x > 0$, on effectue le calcul de

$$K(x) = \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy = -J(x)$$

on trouvera par conséquent

$$\int_0^1 K(x)dx = \ln 2,$$

de telle sorte que les deux intégrales de l'enoncé pour $j = 2$ ont un sens et valent respectivement $\ln 2$ et $-\ln 2$. Ces deux valeurs diffèrent, ce qui ne contredit pas le théorème de Fubini dont les hypothèses ne sont pas vérifiées.
Commentaire. Cet exemple assez simple montre, s'il en était besoin, que les manipulations formelles effectuées sans vérification des hypothèses des théorèmes classiques, peuvent tout simplement conduire à des résultats erronés: la succession des intégrales simples de l'énoncé est indépendante de l'ordre d'intégration lorsque la fonction est intégrable sur l'espace produit. Notons en particulier que le fait que les deux intégrales aient un sens ne suffit pas à assurer leur égalité. Le calcul explicite pour f_2 est inutilement compliqué par la forme peu simple du calcul des primitives. On peut donner un autre exemple.

$$F_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\max(x^3,y^3)}, & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x < 1$, $F_2(x, y) = 0$. Calculons pour $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_2(x, y) dy &= \int_1^x \frac{x-y}{x^3} dy + \int_x^{+\infty} \frac{x-y}{y^3} dy \\ &= x^{-2}(x-1) - x^{-3}(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}) + x\frac{x^{-2}}{2} - x^{-1} = -x^{-2} + x^{-3}2^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F_2(x, y) dy \right) dx = \int_1^{+\infty} (-x^{-2} + x^{-3}2^{-1}) dx = -1 + 2^{-1}2^{-1} = -3/4.$$

Le même calcul donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F_2(x, y) dx \right) dy = 3/4.$$

Les mêmes réflexions que celles formulées pour f_2 sont valables pour F_2.

Exercice 5.11.
a. Pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, on pose $\ln z = \displaystyle\int_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi}$ (intégrale curviligne). Montrer que cela a un sens et que cette fonction coïncide avec le logarithme népérien pour $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\exp(\ln z) = z$ pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. Calculer $\ln(\exp z)$, pour z tel que $\exp(z) \notin \mathbb{R}_-^*$.
b. Montrer que pour $\operatorname{Re} z > 0$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z t^2} dt = \exp -(\ln z)/2 = z^{-1/2}$.
c. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 dx = \pi \ln 2.$$

Pour le dernier calcul, on pourra utiliser l'intégrale sur $[0, 1]^2 \times \mathbb{R}_+$ *de* $(1 + x^2 z^2)^{-1}(1 + y^2 z^2)^{-1}$.

Corrigé. (a) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on a donc posé

$$\ln z = \int_0^1 \frac{z-1}{1-\theta+\theta z} d\theta. \tag{e5.11.1}$$

On peut remarquer que le dénominateur de l'intégrant ne s'annule pas, sinon on aurait

$$1-\theta+\theta \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \theta \operatorname{Im} z = 0 \Longrightarrow \theta \neq 0, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z = \frac{\theta-1}{\theta} \Longrightarrow z \in \mathbb{R}_-.$$

De plus le théorème 3.3.3 implique que (e5.11.1) est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et vérifie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(\ln z) = \int_0^1 \frac{1-\theta+\theta z-(z-1)\theta}{\big(1-\theta+\theta z\big)^2} d\theta = \int_0^1 \big(1-\theta+\theta z\big)^{-2} d\theta \\ = \big[(1-\theta+\theta z)^{-1}\big]_{\theta=1}^{\theta=0}(z-1)^{-1} = (1-z^{-1})(z-1)^{-1} = z^{-1}.\end{aligned}$$

Comme $\ln 1 = 0$, cette fonction coïncide avec le logarithme néperien sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite la fonction $z \mapsto \exp(\ln z) - z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le principe du prolongement analytique $\exp(\ln z) = z$ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ (la connexité - par arcs - de cet ouvert est une conséquence de son caractère étoilé par rapport à 1). Considérons l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par

$$\{z \in \mathbb{C}, \exp z \notin \mathbb{R}_-^*\} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \not\equiv \pi(2\pi)\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{z \in \mathbb{C}, (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi\}}_{\omega_k}.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Sur l'ouvert ω_k, la fonction $z \mapsto \ln(\exp z) - z$ est holomorphe de dérivée nulle. Par suite, pour $z \in \omega_k$

$$\ln(\exp z) - z = \ln\big(\exp(2ik\pi)\big) - 2ik\pi = \ln(1) - 2ik\pi = -2ik\pi, \text{ i.e. } \ln(\exp z) = z - 2ik\pi.$$

(b) D'après le théorème 3.3.3, la fonction $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z t^2} dt$ est holomorphe sur l'ouvert $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ et coïncide avec $\exp(-\frac{\ln z}{2})$ pour z réel strictement positif. Par prolongement analytique, ces deux fonctions holomorphes sont égales sur $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.
(c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(y^{-1})}{y^{-2}-1}\frac{dy}{y^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1} dy$$

de sorte que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \sum_{k\geq 0} x^{-2k} dx.$$

En utilisant le corollaire 1.6.2 du théorème de Beppo-Levi, il vient

$$I = 2\sum_{k\geq 1}\int_1^{+\infty} x^{-2k}\ln x dx = 2\sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty} e^{-(2k-1)t} t dt$$
$$= 2\sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty} e^{-s} s ds (2k-1)^{-2} = 2\Gamma(2)\sum_{k\geq 1}(2k-1)^{-2} = \frac{\pi^2}{4},$$

car $\Gamma(2) = 1$ et

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} n^{-2} = \sum_{k\geq 1}(2k-1)^{-2} + \sum_{k\geq 1}(2k)^{-2} = \sum_{k\geq 1}(2k-1)^{-2} + 2^{-2}\frac{\pi^2}{6},$$

ce qui donne $\sum_{k\geq 1}(2k-1)^{-2} = \pi^2\big(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\big) = \frac{\pi^2}{8}$.
Calculons

$$J = \iiint_{[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} dxdydz$$

On a d'une part, pour $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^A \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} dz = (y^2 - x^2)^{-1}[y\arctan(yz) - x\arctan(xz)]_{z=0}^{z=A}$$
$$= \frac{y\arctan(Ay) - x\arctan(Ax)}{y^2 - x^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2(x+y)},$$

et donc

$$J = \iint_{[0,1]^2} \frac{\pi dxdy}{2(x+y)} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 [\ln(x+y)]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \big(\ln(x+1) - \ln x\big) dx$$
$$= \frac{\pi}{2}[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x]_0^1 = \frac{\pi}{2} 2\ln 2 = \pi\ln 2.$$

Par ailleurs, on a

$$J = \iint_{[0,1]\times\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x^2z^2}\Big[\frac{\arctan yz}{z}\Big]_{y=0}^{y=1} dxdz = \int_{\mathbb{R}_+}\Big[\frac{\arctan xz}{z}\Big]_{x=0}^{x=1}\Big[\frac{\arctan yz}{z}\Big]_{y=0}^{y=1} dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 dz,$$

ce qui fournit le résultat.

Exercice 5.12.

a. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Montrer que si $\mu(X) < +\infty$, les conditions $1 \le q \le p \le +\infty$ impliquent $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ avec une injection continue. Montrer que les conditions $1 \le q \le p \le +\infty$ impliquent $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
b. Montrer que les conditions $1 < q < p < +\infty$ impliquent $l^1(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N}) \subset l^p(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$ avec des injections continues et des inclusions strictes.
c. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux indices distincts. Montrer que $L^p(\mathbb{R}^n)$ n'est pas inclus dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Corrigé. L'exercice 4.4 donne plusieurs détails intéressants reliés aux présentes questions.
(a) Avec les notations de l'énoncé, on a en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|^q_{L^q} = \int_X |u|^q d\mu \le \||u|^q\|_{L^{p/q}} \|1\|_{L^r}, \quad \frac{q}{p} + \frac{1}{r} = 1,$$

ce qui donne

$$\|u\|_{L^q} \le \|u\|_{L^p} \mu(X)^{1-\frac{1}{p}}.$$

La même démonstration donne l'inclusion des espaces locaux puisqu'on intègre la mesure de Lebesgue sur des compacts. On pourra noter au passage que dans les espaces L^p_{loc}, l'exposant p est un indice de régularité.
(b) Soient $1 < q < p < +\infty$ et $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de l^q. On a

$$\|x\|^p_{l^p} = \sum_{n \ge 0} |x_n|^p \le \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^{p-q} \sum_{n \ge 0} |x_n|^q \le \big(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^q\big)^{\frac{p}{q}-1+1}$$

de sorte que $\|x\|_{l^p} \le \|x\|_{l^q}$ et le raisonnement est valable pour $q = 1$ et $p = +\infty$.
(c) Cf. exercices 4.9-10 et remarquer également que si $1 \le p < q \le +\infty$ et $\chi \in C^0_c(\mathbb{R}^n), \chi(0) = 1$,

$$\chi(x)|x|^{-\frac{n}{p}+\epsilon} \in L^p, \quad \chi(x)|x|^{-\frac{n}{p}+\epsilon} \notin L^q$$

pourvu que

$$\epsilon > 0, \quad -\frac{qn}{p} + q\epsilon < -n, \quad \text{i.e. } 0 < \epsilon < \frac{n}{q}(\frac{q}{p} - 1).$$

En outre,

$$(1 + |x|)^{-\frac{n}{q}-\sigma} \in L^q, \quad (1 + |x|)^{-\frac{n}{q}-\sigma} \notin L^p$$

pourvu que

$$0 < \sigma, \quad \frac{np}{q} + \sigma p < n \quad \text{i.e. } 0 < \sigma < \frac{n}{p}\big(1 - \frac{p}{q}\big).$$

INTEGRATION, Feuille d'exercices 6

Exercice 6.1.
a. On considère une norme sur $\mathbb{R}^n$, notée $\|\cdot\|$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels α, β pour que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+\|x\|)^\beta} < +\infty, \qquad \int_{\|x\|\le 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < +\infty.$$

b. On suppose que $n \geq 2$ et on pose, en désignant par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$, et pour $\lambda > 0$

$$C_{1,\lambda} = \{(x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \|x'\| \leq \lambda |x_1|\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels α, β pour que

$$\int_{C_{1,\lambda}} \frac{dx}{(1+|x_1|)^\beta} < +\infty, \qquad \text{pour tout compact } K \int_{C_{1,\lambda}\cap K} \frac{dx}{|x_1|^\alpha} < +\infty.$$

Montrer que ceci permet de démontrer (a) sans utiliser de changement de variables.
Corrigé. (a) La réponse est $\beta > n$ et $\alpha < n$. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on peut supposer que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et passer en coordonnées polaires. Il s'agit alors d'examiner les intégrales simples

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1}(1+r)^{-\beta} dr < +\infty \Longleftrightarrow n - 1 - \beta < -1 \quad \text{i.e. } \beta > n,$$

et

$$\int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr < +\infty \Longleftrightarrow n - 1 - \alpha > -1 \quad \text{i.e. } \alpha < n.$$

(b) Utilisons le théorème de Fubini pour ces fonctions positives mesurables. Il vient, avec V_{n-1} la mesure de Lebesgue $(n-1)$ dimensionnelle de la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$ pour la norme $\|\|$

$$\int_{C_{1,\lambda}} \frac{dx}{(1+|x_1|)^\beta} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x'|\le\lambda|x_1|} dx' \right) \frac{dx_1}{(1+|x_1|)^\beta} = V_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^{n-1}|x_1|^{n-1}}{(1+|x_1|)^\beta} dx_1 < +\infty$$

si et seulement si $\beta > n$. De manière analogue, si la condition de l'énoncé est vérifiée pour tout compact K, elle l'est pour $\{(x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, |x'| \leq \lambda, |x_1| \leq 1\}$ et le calcul donne

$$\int_0^1 \frac{\lambda^{n-1}|x_1|^{n-1}}{|x_1|^\alpha} dx_1 < +\infty \Longrightarrow \alpha < n.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et K est un compact, K est inclus dans une boule euclidienne de centre 0 et de rayon fini sur laquelle l'intégrale est finie d'après le même calcul. En remarquant que

$$\mathbb{R}^n = \cup_{1\le j\le n}\{x \in \mathbb{R}^n, \max_{1\le k\le n} |x_k| = |x_j|\}$$

on voit que l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ est une somme finie d'intégrale sur des cônes du type

$$\{(x_1, x') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}, \max_{2\le k\le n} |x_k| \le |x_1|\}$$

pour lesquels le calcul est fait ci-dessus.

Exercice 6.2.
Soit n un entier ≥ 2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|$ la norme euclidienne de x.
a. Démontrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2}dx = 1$.
b. Soit $R \in \mathbb{R}_+$. On note $B^n(R)$ la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R et $|B^n(R)|$ son volume. Montrer que

$$|B^n(R)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n.$$

c. On note $S^{n-1}(R)$ la sphère de centre 0 et de rayon R (le bord de $B^n(R)$). En utilisant les résultats du problème 6.1, calculer le volume $n-1$ dimensionnel de $S^{n-1}(R)$, noté $|S^{n-1}(R)|$. Calculer

$$\frac{d}{dR}|B^n(R)|$$

et donner une justification intuitive du résultat.
d. Calculer le volume de l'ellipsoïde

$$\{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{1\le j\le n} \frac{x_j^2}{a_j^2} \le 1\}$$

(les a_j sont des paramètres > 0).
e. Soit A une matrice $n\times n$ symétrique réelle définie positive. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\langle Ax,x\rangle}dx.$$

f. Soit B une matrice $n\times n$ symétrique réelle inversible. Calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\epsilon\|x\|^2}e^{-i\pi\langle Bx,x\rangle}dx.$$

g. Soient A, B des matrices $n\times n$ symétriques réelles telles que $A \gg 0$ (i.e. $\langle Ax, x\rangle \geq d\|x\|^2$, $d > 0$.). Calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\epsilon\|x\|^2} e^{-\pi\langle (A+iB)x,x\rangle}dx.$$

Corrigé. (a) On a $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2}dx = \prod_{1\leq j\leq n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2}dx_j = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}dt\right)^n$ et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-s}s^{-1/2}ds\pi^{-1/2} = \Gamma(1/2)\pi^{-1/2} = 1.$$

(b) En passant en coordonnées polaires, on obtient de (a)

$$1 = \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2}r^{n-1}dr|S^{n-1}| = |S^{n-1}|\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{-n+1}{2}}2^{-1}s^{-1/2}\pi^{-1/2}ds$$

soit

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

et par suite

$$|B^n(R)| = \int_0^1 r^{n-1}dr|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n.$$

(c) On a

$$|S^{n-1}(R)| = R^{n-1}|S^{n-1}|.$$

On pourra consulter les explications de la fin de la section 5.3.
(d) Par changement de variables linéaire, $y_j = a_j x_j$, on obtient que ce volume vaut

$$|B^n(1)|\prod_{1\leq j\leq n} a_j.$$

(e) Par changement de variables $x = A^{-1/2}y$, on trouve $(\det A)^{-1/2}$.
(f) La matrice B se diagonalise dans une base orthonormale, i.e.

$$D = {}^tPBP, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ diagonale, } {}^tPP = \mathrm{Id}.$$

La changement de variables $x = Py$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\pi\|x\|^2}e^{-i\pi\langle Bx,x\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\pi\|y\|^2}e^{-i\pi\langle Dy,y\rangle}dy = \prod_{1\leq j\leq n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2(\epsilon+id_j)}dt,$$

ce qui donne en utilisant l'exercice 5.11 (et la détermination principale de la racine)

$$\prod_{1\le j\le n}(\epsilon+id_j)^{-1/2}\underset{\epsilon\to 0_+}{\longrightarrow}\prod_{1\le j\le n}|d_j|^{-1/2}e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(d_j)}=|\det B|^{-1/2}e^{-i\frac{\pi}{4}\text{signature(B)}}.$$

(g) On a

$$\begin{aligned}I(\epsilon)=\int_{\mathbb{R}^n}&e^{-\pi\epsilon\|x\|^2}e^{-\pi\langle(A+iB)x,x\rangle}dx\\&=(\det A)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi\epsilon\|A^{-1/2}y\|^2}e^{-\pi\langle(\operatorname{Id}+iA^{-1/2}BA^{-1/2})y,y\rangle}dy\end{aligned}$$

La matrice symétrique réelle $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ se diagonalise (valeurs propres $\lambda_j, 1\le j\le n$) dans une base orthonormale et on trouve en utilisant le calcul précédent

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} I(\epsilon)=(\det A)^{-1/2}\prod_{\substack{\mu_j\text{ valeurs propres de}\\ \operatorname{Id}+iA^{-1/2}BA^{-1/2}}}\mu_j^{-1/2}.$$

On peut remarquer que les μ_j sont de la forme $1+i\lambda_j$ où les λ_j sont les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $A^{-1/2}BA^{-1/2}$.

Exercice 6.3.
Soit $\rho\in L^1(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale 1. On pose, pour $\epsilon>0$, $\rho_\epsilon(x)=\epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$.
a. Soit $p\in[1,+\infty[$ et $u\in L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $u*\rho_\epsilon$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\epsilon\to 0_+$.
b. On considère $u=\mathbf{1}_{[0,1]}$ et $\rho(x)=e^{-\pi\|x\|^2}$. A-t-on convergence de $u*\rho_\epsilon$ vers u dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

Corrigé. (a) Cf. théorème 3.4.2. (b) Non car la suite de fonctions continues $u*\rho_\epsilon$ convergerait uniformément et donc simplement vers une fonction continue. On a pour $\epsilon>0$

$$(u*\rho_\epsilon)(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{[0,1]}(x-\epsilon y)e^{-\pi y^2}dy=\int_{(x-1)/\epsilon}^{x/\epsilon}e^{-\pi y^2}dy.$$

Par conséquent, pour $x\in]0,1[,x/\epsilon\to+\infty$ et $(x-1)/\epsilon\to-\infty$ de sorte que

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}(u*\rho_\epsilon)(x)=\begin{cases}1 & \text{pour } 0<x<1,\\ 1/2=\int_{-\infty}^0 e^{-\pi y^2}dy=\int_0^{+\infty}e^{-\pi y^2}dy & \text{pour } x=0,1,\\ 0 & \text{pour } x\notin[0,1],\end{cases}$$

car pour $x>1$,

$$0\le\int_{(x-1)/\epsilon}^{x/\epsilon}e^{-\pi y^2}dy\le e^{-\pi(x-1)^2\epsilon^{-2}}\epsilon^{-1}\underset{\epsilon\to 0_+}{\longrightarrow}0.$$

Un raisonnement analogue donne le cas $x < 0$. La limite simple est donc discontinue en 0 et 1.

Exercice 6.4 *(suite de l'exercice 5.6)***.**
La classe de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, est définie par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ pour tous les multi-indices } \alpha, \beta, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| = p_{\alpha\beta}(u) < \infty\}$$

où l'on désigne par multi-indice un $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \ \beta \in \mathbb{N}^n, \partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$.
a. Montrer que $e^{-\|x\|^2}$, ($\|x\|$ est la norme euclidienne de x) et plus généralement, si A est une matrice symétrique définie positive $n \times n$, la fonction $v_A(x) = e^{-\pi\langle Ax,x\rangle}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que les $p_{\alpha\beta}$ sont des semi-normes et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet.
b. On rappelle que la transformée de Fourier de u est définie par

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\cdot\xi} u(x) dx.$$

Montrer que la transformation de Fourier est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. *On pourra remarquer que*

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} \partial_x^\alpha (x^\beta u)(x) dx (2i\pi)^{|\beta|-|\alpha|}(-1)^{|\beta|}.$$

c. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx e^{-\pi\xi^2} = e^{-\pi\xi^2}$ *(la seconde égalité peut être obtenue en prenant la dérivée par rapport à ξ de $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx$).* Montrer que pour A définie positive

$$\widehat{v_A}(\xi) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}.$$

d. On pose pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\epsilon > 0$, $\displaystyle u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} d\xi$. Montrer que

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(x+\epsilon y) - u(x)\big) e^{-\pi|y|^2} dy + u(x).$$

Montrer la formule d'inversion de Fourier: $\displaystyle u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$.
e. Montrer que la transformation de Fourier se prolonge de manière unique en une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Corrigé. (a) Comme la matrice A vérifie $\langle Ax, x\rangle \geq d\|x\|^2, d > 0$, la fonction v_A vérifie, pour tout N, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1 + \|x\|^N)e^{-\langle Ax,x\rangle} < +\infty$. En outre la fonction v_A est C^∞ (composition de C^∞) et on voit facilement par récurrence que ses dérivées partielles sont le produit d'un polynôme par v_A, prouvant ainsi son appartenance à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Les $p_{\alpha\beta}$ sont des semi-normes, i.e. sont à valeurs positives, telles que $p_{\alpha\beta}(\lambda u) = |\lambda| p_{\alpha\beta}(u)$ et vérifient l'inégalité triangulaire. Considérons une suite de Cauchy $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Cela signifie que pour tout α, β, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $k_{\alpha\beta\epsilon}$ tel que, pour $k \geq k_{\alpha\beta\epsilon}, l \geq 0$

$$p_{\alpha\beta}(u_{k+l} - u_k) \leq \epsilon.$$

En utilisant $\alpha = \beta = 0$, on trouve une fonction continue u limite uniforme des u_k. En utilisant la convergence uniforme de la suite $(\partial_x^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on montre que u est C^∞ et que les suites $(\partial_x^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers $\partial_x^\alpha u$. Puis en écrivant

$$|x^\alpha \partial_x^\beta (u_k - u)(x)| = \lim_{l\to+\infty} |x^\alpha \partial_x^\beta (u_k - u_l)(x)| \leq \limsup_l p_{\alpha\beta}(u_k - u_l) \leq \epsilon$$

pour $k \geq k_{\alpha\beta\epsilon}$, il vient $p_{\alpha\beta}(u_k - u) \leq \epsilon$ pour $k \geq k_{\alpha\beta\epsilon}$, ce qui démontre la convergence.
(b) La formule de l'énoncé, issue d'intégrations par parties, démontre que

$$p_{\alpha\beta}(\hat{u}) \leq \int (1+|x|)^{-n-1} dx (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup (1+|x|)^{n+1} \partial_x^\alpha (x^\beta u)$$

et donc la continuité sur $\mathcal{S}$ de la transformation de Fourier.
(c) On a évidemment

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx e^{-\pi\xi^2}$$

et en dérivant (par rapport à ξ) la seconde intégrale (théorème 3.3.2), on trouve

$$\partial_\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} (-2\pi i)(x+i\xi) dx = i \int_{\mathbb{R}} \partial_x \big(e^{-\pi(x+i\xi)^2}\big) dx = 0,$$

ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

et le résultat. En outre, en utilisant le changement de variables $x = A^{-1/2} y$, il vient

$$\widehat{v_A}(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi\langle Ax, x\rangle} dx = (\det A)^{-1/2} \int e^{-2i\pi\langle y, A^{-1/2}\xi\rangle} e^{-\pi|y|^2} dy,$$

ce qui donne, en utilisant ce qui précède,

$$\widehat{v_A}(\xi) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi\|A^{-1/2}\xi\|^2} = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle}.$$

(d) On a

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} d\xi = \iint e^{2i\pi x\xi} e^{-2i\pi y\xi} u(y) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} d\xi dy$$

et donc

$$u_\epsilon(x) = \int u(y) e^{-\pi\epsilon^{-2}|x-y|^2} dy \epsilon^{-n} = \int u(x-\epsilon y) e^{-\pi y^2} dy$$

$$= \int \big(u(x+\epsilon y) - u(x)\big) e^{-\pi|y|^2} dy + u(x).$$

On a donc

$$|u_\epsilon(x) - u(x)| \le \epsilon \sup_x |\nabla u(x)|$$

et par suite, en utilisant le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} d\xi = \lim u_\epsilon(x) = u(x).$$

(e) Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit de remarquer que, pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \iint e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) \bar{v}(x) dx d\xi = \int \hat{u}(\xi) \bar{\hat{v}}(\xi) d\xi = \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2}.$$

Exercice 6.5.
En effectuant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes

$$I = \iint_{x>0,\ y>0,\ x+y<a} \frac{3y}{\sqrt{1+(x+y)^3}} dx dy, \qquad a > 0,$$

$$J = \iint_{x>0,\ y>0,} |x^4 - y^4| e^{-(x+y)^2} dx dy, \text{(examiner le changement } (x,y) = (u+v, u-v)).$$

Corrigé. On a avec $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$,

$$I = \iint H(x)H(y-x)H(a-y) \frac{3(y-x)}{\sqrt{1+y^3}} dx dy = \iint H(x)H(y-x)H(a-y)H(y) \frac{3(y-x)}{\sqrt{1+y^3}} dx dy$$

et par suite

$$I = \int_0^a (1+y^3)^{-1/2} 3 \left(\int_0^y (y-x) dx\right) dy = \int_0^a (1+y^3)^{-1/2} 3 (y^2 - \frac{y^2}{2}) dy = (1+a^3)^{1/2} - 1.$$

De plus, en posant $x = u - v, y = u + v$, il vient

$$J = 2 \iint H(u-v)H(u+v) 2|v| 2|u| 2(u^2+v^2) e^{-4u^2} du dv$$

soit

$$J = 2^4 \int_0^{+\infty} \left(\int H(u-|v|)|v|(u^2+v^2) dv\right) u e^{-4u^2} du$$

$$= 2^5 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u v(u^2+v^2) dv\right) u e^{-4u^2} du = 3 \times 2^3 \int_0^{+\infty} u^5 e^{-4u^2} du = 3 \times 2^{-4} \Gamma(3) = \frac{3}{8}.$$

References

[Apo] T.Apostol, *Introduction to analytic number theory, Undergraduate texts in mathematics*, Springer-Verlag..

[Bou] Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann.

[Bou] Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Hermann.

[BrP] M.Briane, G.Pagès, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2000.

[Buc] H.Buchwalter, *Le calcul intégral, licence de mathématiques*, Ellipses.

[Coh] D.L.Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.

[Coz] J.-P.Conze, *Calcul intégral*, Université de Rennes, 1991.

[GO1] B.R.Gelbaum, J.M.H.Olmsted, *Theorems and counterexamples in mathematics*, Problem books in mathematics, Springer -Verlag.

[GO2] ———, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day Inc., 1966.

[Hal] P.R.Halmos, *Measure theory*, University series in undergraduate mathematics, van Nostrand.

[HLP] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1959.

[Hö1] L.Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer-Verlag, 1983.

[Hö2] ———, *Notions of convexity*, Progress in mathematics, vol.127, Birkhäuser.

[LiL] E.H.Lieb, M.Loss, *Analysis*, Graduate studies in mathematics, vol.14, AMS.

[Mét] M.Métivier, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1968.

[Ru1] W.Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New-York, 1987.

[Ru2] ———, *Analyse réelle et complexe*, Masson.

[Sog] C.Sogge, *Fourier integral in classical analysis*, Cambridge tracts in Mathematics, vol.105.

[Ste] E.M.Stein, *Harmonic analysis*, Princeton Maths series, vol.43.