UNE PROCÉDURE DE CALDERÓN-ZYGMUND POUR LE PROBLÈME DE LA RACINE k–IÈME

FERRUCCIO COLOMBINI, Università di Pisa, colombin@dm.unipi.it

NICOLAS LERNER, Université de Rennes 1, lerner@univ-rennes1.fr

le 4 octobre 2001

RÉSUMÉ. Soit f une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$, à valeurs positives ou nulles, de classe C^k, où k est un entier ≥ 2. Un résultat de Colombini–Jannelli–Spagnolo assure que $\nabla(f^{1/k})$ appartient à L^1_{loc}. Nous démontrons ici que $\nabla(f^{1/k}) \in L_w^{k/k-2}$, ce qui fournit une amélioration optimale du résultat ci-dessus et une généralisation d'un théorème classique de Glaeser sur la racine carrée. La méthode de preuve requiert l'usage d'une décomposition de Calderón–Zygmund de la fonction f qui nous permet de nous ramener à des formes normales de manipulation simple. Nous montrons également que la régularité C^k est essentiellement nécessaire au résultat. Nous donnons quelques applications à des problèmes d'équations aux dérivées partielles faiblement hyperboliques.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Une inégalité classique sur les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ de classe C^1 telles que $f'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ affirme que

$$f'(t)^2 \leq 2f(t)\|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{1.1}$$

De cette inégalité, on déduit immédiatement que si f est une fonction $\in C^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors $f^{1/2}$ est lipschitzienne sur Ω, i.e. $\nabla(f^{\frac{1}{2}}) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Un contre-exemple dû à Glaeser[G] et repris dans [D] montre que, même pour une fonction $f \geq 0$ de classe C^∞ et plate en ses zéros, on ne peut espérer mieux que $f^{1/2}$ de classe C^1. Par ailleurs, des développements intéressants, donnés dans l'appendice de [Gu], issus de travaux de C.L.Fefferman, prouvent qu'une fonction ≥ 0 de classe C^4 (resp. $W^{4,\infty}$) est somme de carrés de fonctions de classe C^2 (resp. $W^{2,\infty}$), le nombre de carrés dépendant seulement de la dimension de l'espace. Si on remplace l'hypothèse C^4 ci-dessus par C^∞, la conclusion ne s'en trouve pas améliorée. Cette décomposition en somme de carrés est l'élément essentiel implicite de la preuve de l'inégalité de Fefferman-Phong prouvée dans [FP] (voir aussi [H], *theorem 18.6.8, lemma 18.6.9* et [Bo]), obtenue via une décomposition de Calderón-Zygmund.

Plus généralement, il est naturel de se poser la question de la régularité de la racine $k-$ième d'une fonction à valeurs positives. Le *lemma 1* de [CJS] assure que si f est positive de classe C^k, alors $\nabla(f^{1/k})$ appartient localement à L^1. Dans ce papier nous démontrons que l'on peut obtenir en fait que $\nabla(f^{1/k}) \in L_w^{\frac{k}{k-2}}$, ce qui constitue le meilleur résultat possible dans l'échelle L^p. Plus[1] précisément, nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $k \geq 2$ un entier et $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ une fonction de classe C^k. Alors, pour tout compact $K \subset \Omega$,*

$$\nabla(f^{\frac{1}{k}}) \in L_w^{\frac{k}{k-2}}(K), \tag{1.2}$$

et pour tout voisinage compact L de K, il existe une constante $\alpha(k, K, L)$ telle que

$$\|\nabla(f^{\frac{1}{k}})\|_{L_w^{\frac{k}{k-2}}(K)} \leq \alpha(k, K, L)\|f\|_{C^k(L)}^{\frac{1}{k}}. \tag{1.3}$$

La preuve de ce théorème est donnée dans les paragraphes suivants. Nous souhaitons ici faire quelques commentaires sur cet énoncé et en particulier donner une explication intuitive sur les indices mis en jeu et notre méthode de preuve. Une première remarque est que ce problème est essentiellement unidimensionnel, puisque le gradient est la collection des dérivées partielles.

L'idée fondamentale de la preuve, empruntée d'ailleurs aux travaux d'analyse harmonique et pseudo-différentielle sur des sujets connexes, repose sur l'utilisation d'une décomposition de Calderón-Zygmund de la fonction f. En fait, la difficulté de ces questions de régularité vient essentiellement des zéros d'ordre infini de f et de leur propension à s'accumuler ; notre méthode consiste à découper l'espace en une famille de boules ouvertes dont on contrôle l'"overlap" et dans chacune desquelles le comportement de f est de type fini. Cela signifie que l'ouvert $\{f > 0\}$ est réunion d'une famille dénombrable de boules $B_\nu = B(x_\nu, r_\nu)$ qui dépendent de la fonction f et telles que, sur chaque B_ν, le comportement de f soit simple et en fait proche d'un polynôme normalisé. Pour une fonction de classe C^k, il est naturel de comparer les tailles respectives des quantités

$$|f^{(j)}(x)|^{\frac{k}{k-j}}, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k-1.$$

---

[1]Rappelons que pour $1 \leq p < \infty$, $u \in L_w^p(K)$ signifie que $\sup_{M>0} M^p m(\{x \in K, |u(x)| > M\}) < +\infty$ où m désigne la mesure de Lebesgue. Pour $1 \leq q < p < \infty$, on a pour K compact, $L^p(K) \subset L_w^p(K) \subset L^q(K)$ et par suite

$$L^p(K) \subset L_w^p(K) \subset \cap_{q<p} L^q(K).$$

Pour simplifier nos explications, supposons $k = 5$, qui est le premier cas non aisément issu de l'inégalité (1.1). Si en un point x_ν,

$$f(x_\nu) = \max_{0\le j\le 4} |f^{(j)}(x_\nu)|^{\frac{5}{5-j}},$$

alors on peut montrer qu'il en va essentiellement de même sur toute la boule B_ν, au sens où, pour $x \in B_\nu$, on a $f(x) \ge \frac{1}{2}\max_{0\le j\le 4}|f^{(j)}(x)|^{\frac{5}{5-j}}$. Sur cette boule, la fonction f est proche d'une constante strictement positive et l'appartenance à L^∞ de la dérivée de $f^{1/5}$ est assurée. Il est facile de voir que les indices impairs (ici $j = 1, 3$) ne peuvent jouer aucun rôle à cause de la positivité de la fonction f. Le cas suivant est donc

$$|f''(x_\nu)|^{5/3} = \max_{0\le j\le 4} |f^{(j)}(x_\nu)|^{\frac{5}{5-j}}.$$

De même, ce type d'estimation reste vrai sur la boule B_ν et la fonction f est proche, après changement d'échelle, d'un polynôme normalisé de degré 2, comme $x^2 + \theta$, θ paramètre positif ou nul. Or la dérivée de $(x^2 + \theta)^{1/5}$ appartient uniformément à $L^{5/3}_w$. Le dernier cas à examiner pour $k = 5$ est

$$|f^{(4)}(x_\nu)|^5 = \max_{0\le j\le 4} |f^{(j)}(x_\nu)|^{\frac{5}{5-j}}.$$

Après changement d'échelle, ce type de fonction est proche de

$$p_4(x) = \theta_1 + x^2(x^2 + \theta_2), \qquad \theta_1, \theta_2 \text{ paramètres positifs ou nuls bornés,}$$

et la dérivée de $p_4^{1/5}$ appartient uniformément à $L^{5/3}_w$. Si on accepte ces justifications intuitives pour $k = 5$, on voit qu'en général, le cas le plus mauvais est celui où f'' est dominant, fournissant avec la dérivée de $x^{2/k}$ la régularité minimale $L^{k/(k-2)}_w$. Par conséquent la difficulté est reportée dans la construction des boules B_ν, puisque le comportement de f dans chacune des boules est trivial. Cette construction est en fait assez simple et naturelle; elle est donnée en détail dans le paragraphe 2, dans lequel nous utilisons une version continue (et non pas discrète) d'une partition de l'unité associée à une métrique lente, comme cela a été utilisé dans [BF] (voir aussi le *theorem 1.4.10* de [H]).

On peut remarquer également que (1.3) n'est pas une conséquence immédiate de (1.2) car l'application $f \mapsto \nabla(f^{1/k})$ est non linéaire et qu'aucun argument simple d'analyse fonctionnelle ne semble disponible pour démontrer une telle implication. D'ailleurs nous démontrons d'abord (1.3) pour $f > 0$ indépendamment de la borne inférieure de f ce qui implique (1.2), montrant à nouveau, s'il en était besoin, que les inégalités priment sur l'analyse fonctionnelle pour ce type de problème.

Le contre-exemple suivant, inspiré de [CJS], montre que la régularité C^k est minimale pour que la dérivée de la racine k-ième soit absolument continue.

Théorème 1.2. *Soit $k \geq 2$ un entier. Il existe une fonction $f \in \cap_{\theta<1} C^{k-1,\theta}(\mathbb{R})$, $f \geq 0$ telle que*

$$f^{1/k} \notin W^{1,1}_{loc}.$$

De plus, on peut choisir f telle que $f^{-1}(\{0\})$ soit réduit à un point.

Nous donnons maintenant une application du théorème 1.1 à l'étude d'un problème de Cauchy faiblement hyperbolique. On considère le problème de Cauchy suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u - \sum_{1\leq i,j\leq d} a_{ij}(t)\partial^2_{x_i x_j} u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{array} \right. , (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

pour lequel on fait l'hypothèse de faible hyperbolicité

$$\forall (t,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d, \quad a(t,\xi) = \sum_{1\leq i,j\leq d} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geq 0. \tag{1.5}$$

Dans [CJS], les auteurs prouvent que, si $a_{ij} \in C^k$, le problème (1.4) est bien posé dans G^s pourvu que $s < 1 + \frac{k}{2}$. Un élément essentiel de la preuve repose sur leur *lemma 1* cité plus haut. Par ailleurs, ces auteurs démontrent par la construction d'un contre-exemple que, si $s > 1 + \frac{k}{2}$, le problème de Cauchy (1.4) n'est pas bien posé dans G^s. Dans [N], T.Nishitani généralise ces résultats aux cas d'opérateurs dépendant aussi des variables d'espace x, mais seulement pour $k \leq 2$; il étudie également le cas limite $s = 1 + \frac{k}{2}$ et démontre l'existence d'une solution de (1.4) pour un temps T assez petit, sans donner toutefois une estimation précise de ce temps d'existence, ce que nous sommes en mesure de faire avec le résultat suivant.

Théorème 1.3. *Soit $k \geq 2$ un entier. On pose $s = 1 + \frac{k}{2}$. Soient $(a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq d}$ une matrice symétrique de fonctions vérifiant* (1.5) *sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et de classe C^k. Alors le problème de Cauchy* (1.4) *est bien posé dans G^s et la solution existe pour $0 \leq t < T_0$ où*

$$T_0 = \min\left(\frac{A_0}{B_0+1}, \left(\frac{A_0}{B_0+1}\right)^{k/2} \right),$$

où A_0 ne dépend que des données u_0, u_1 qui vérifient $|\widehat{u_0}(\xi)| + |\widehat{u_1}(\xi)| \leq C \exp -A_0|\xi|^{\frac{1}{s}}$ et $B_0 = \beta(k, A_0)\, \|a\|^{1/k}_{C^k([-A_0, 2A_0])}$.

On peut remarquer que pour l'étude du problème (1.4), les cas $k \leq 2$ (i.e. $s \leq 2$) et $k > 2$ (i.e. $s > 2$) sont très différents, comme les papiers [N], [K], [OT1], [OT2] l'ont démontré. En effet, on peut considérer des problèmes du type (1.4) avec des coefficients dépendant également des variables d'espace x. On examine alors le symbole ≥ 0

$$a(t,x,\xi) = \sum_{1\leq i,j\leq d} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \qquad \text{où} \quad (t,x,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

L'examen de la preuve montre que l'on doit estimer des quantités du type

$$\int_0^T \sup_{\substack{x\in K\\ |\xi|=1}} \frac{|\partial_t a(t,x,\xi)|}{a(t,x,\xi)^{1-\frac{1}{k}}} dt, \tag{1.7}$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^d$. Or si $k=2$, l'inégalité ponctuelle (1.1) fournit une majoration de (1.7) par

$$T\sqrt{2} \sup_{\substack{x\in K, t\in\mathbb{R}\\ |\xi|=1}} |\partial_t^2 a(t,x,\xi)|^{1/2}.$$

En revanche, lorsque $k>2$, l'inégalité (1.3) étant intégrale, elle permet de contrôler seulement

$$\sup_{\substack{x\in K\\ |\xi|=1}} \int_0^T \frac{|\partial_t a(t,x,\xi)|}{a(t,x,\xi)^{1-\frac{1}{k}}} dt \tag{1.8}$$

et pas (1.7) (le choix $a(t,x,\xi)=(t-x)^2\xi^2$, $T=1, K=[0,1]$ fournit un exemple de cas où, pour $k>2$, (1.8) est fini tandis que (1.7) est infini).

Le papier est organisé de la manière suivante. Dans le §2.*Décomposition de Calderón-Zygmund: une métrique lente sur* $\mathbb{R}$, on construit une métrique sur $\mathbb{R}$, dont on démontre la lenteur et qui fournira une partition de l'unité adaptée à la fonction que nous examinons. En admettant une proposition-clé sur les f essentiellement polynômiales, nous obtenons une estimation uniforme pour les fonctions strictement positives. Le §3.*Fonctions positives ou nulles*, donne la fin de la preuve du théorème 1.1. C'est dans le §4.*Formes normales: preuve de la proposition 2.3* que nous étudions les cas où f se présente comme une perturbation d'un polynôme normalisé. Le §5 contient la construction du contre-exemple du théorème 1.2 et dans le §6, on fournit la démonstration du théorème 1.3.

2. Décomposition de Calderón-Zygmund: une métrique lente sur $\mathbb{R}$

Soient k un entier ≥ 2 et a une fonction k fois différentiable, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty)$ telle que la dérivée $k-$ième $a^{(k)}$ appartienne à $L^\infty(\mathbb{R})$. On pose, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\lambda(x) = \Big(\sum_{0\leq j\leq k-1} |a^{(j)}(x)|^{\frac{2k}{k-j}}\Big)^{1/k}. \tag{2.1}$$

On remarque en particulier que la fonction λ appartient à $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$ et que pour

$$0\leq j\leq k-1, \quad |a^{(j)}(x)| \leq \lambda(x)^{\frac{k-j}{2}}. \tag{2.2}$$

Lemme 2.1. *La métrique $|dx|^2/\lambda(x)$ est lente sur $\mathbb{R}$ et, plus précisément, il existe des constantes strictement positives ρ_0 et C_0 telles que l'on ait*

$$|x_2 - x_1| \leq \rho_0 \lambda(x_1)^{1/2} \Longrightarrow \frac{1}{C_0} \leq \frac{\lambda(x_2)}{\lambda(x_1)} \leq C_0.$$

La constante ρ_0 ne dépend que de k et de $\|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ tandis que C_0 ne dépend que de k. Par ailleurs $1/\rho_0$ reste borné lorsque $\|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est borné.

Preuve. Posons $\lambda_r = \lambda(x_r), r = 1, 2$ et $x_2 = x_1 - t\lambda_1^{1/2}$ où $t \in [-1, +1]$. On a, en utilisant la formule de Taylor et (2.2), posant $\gamma = \|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$,

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1)^k = \lambda(x_2 + t\lambda_1^{1/2})^k &= \sum_{0\leq j \leq k-1} |a^{(j)}(x_2 + t\lambda_1^{1/2})|^{\frac{2k}{k-j}} \\
&\leq \sum_{0\leq j\leq k-1} \Big(\sum_{j+l\leq k-1} |a^{(j+l)}(x_2)| \frac{|t\lambda_1^{1/2}|^l}{l!} + \gamma \frac{|t\lambda_1^{1/2}|^{k-j}}{(k-j)!} \Big)^{\frac{2k}{k-j}} \\
&\leq \sum_{0\leq j\leq k-1} \Big(\sum_{j+l\leq k-1} \lambda_2^{\frac{k-j-l}{2}} \lambda_1^{l/2} |t|^l + \gamma \lambda_1^{\frac{k-j}{2}} |t|^{k-j} \Big)^{\frac{2k}{k-j}} \\
&\leq C(k) \Big[\sum_{\substack{0\leq j\leq k-1 \\ j+l\leq k-1}} \lambda_2^{\frac{(k-j-l)(2k)}{2(k-j)}} \lambda_1^{\frac{l2k}{2(k-j)}} |t|^{\frac{2kl}{k-j}} + \gamma^{\frac{2k}{k-j}} \lambda_1^{\frac{k-j}{2}\frac{2k}{k-j}} |t|^{(k-j)\frac{2k}{k-j}} \Big] \\
&= C(k) \Big[\sum_{\substack{0\leq j\leq k-1 \\ j+l\leq k-1}} \lambda_2^{\frac{(k-j-l)k}{k-j}} (\lambda_1 t^2)^{\frac{lk}{k-j}} \Big] + \lambda_1^k |t|^{2k} C_1(k)(\gamma^2 + \gamma^{2k}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $|t| \leq \rho$ avec $0 < \rho \leq 1$ tel que

$$\rho^{2k} C_1(k)(\gamma^2 + \gamma^{2k}) \leq 1/2, \tag{2.3}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\lambda_1^k &\leq 2C(k) \sum_{\substack{0\leq j\leq k-1 \\ j+l\leq k-1}} \lambda_2^{\frac{(k-j-l)k}{k-j}} (\lambda_1 t^2)^{\frac{lk}{k-j}} \\
&\leq 2C(k) \sum_{\substack{0\leq j\leq k-1 \\ j+l\leq k-1}} \frac{k-j-l}{k-j} \lambda_2^k + \frac{l}{k-j} (\lambda_1 t^2)^k \leq C_3(k) \big(\lambda_2^k + (\lambda_1 t^2)^k\big),
\end{aligned}$$

ce qui donne $\lambda_1^k \leq 2C_3(k)\lambda_2^k$, pourvu que

$$C_3(k)\rho^{2k} \leq 1/2. \tag{2.4}$$

En choisissant $\rho \in]0,1]$ satisfaisant (2.3) et (2.4), il vient $\lambda_1^k \le C_4(k)\lambda_2^k$ sous l'hypothèse $|x_1 - x_2| \le \rho\lambda(x_1)$. Cette hypothèse implique donc $|x_1 - x_2| \le \rho\lambda(x_2)C_5(k)$, et en supposant que $\tilde\rho = C_5(k)\rho$ satisfait (2.3-4), on obtient le résultat du lemme. Remarquons également que les conditions (2.3-4) que ρ doit satisfaire ainsi que $C_5(k)\rho$ assurent que $1/\rho_0$ reste borné avec γ. $\square$

Nous souhaitons maintenant construire une partition de l'unité associée à la métrique précédente. Bien que cette construction soit classique et qu'une version discrète en soit donnée dans [H](*theorem 1.4.10*), nous donnons ici une version continue de manipulation plus aisée[2] dans l'esprit de [BL](*lemme 2.1.2*). Soit χ_0 une fonction de $C^\infty(\mathbb{R};[0,1])$, décroissante, égale à 1 sur $(-\infty, 1/2]$ et à 0 sur $[1,+\infty)$. On pose, pour $0 < \rho \le \rho_0$,

$$\Theta_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_0\left((x-y)^2\lambda(y)^{-1}\rho^{-2}\right)\lambda(y)^{-1/2}dy. \tag{2.5}$$

Comme χ_0 est décroissante, on a, en utilisant le lemme 2.1,

$$\Theta_\rho(x) \ge \int_{\mathbb{R}} \chi_0\left((x-y)^2\lambda(x)^{-1}C_0\rho^{-2}\right)C_0^{-1/2}\lambda(x)^{-1/2}dy \ge \rho C_0^{-1} > 0. \tag{2.6}$$

On obtient en outre

$$|\Theta_\rho^{(k)}(x)| \le C(k,\chi_0,\rho)\int_{|x-y|\le\rho\lambda(y)^{1/2}} \lambda(y)^{-\frac{1+k}{2}}dy \le C_1(k,\chi_0,\rho)\lambda(x)^{-\frac{k}{2}}. \tag{2.7}$$

Ceci fournit le lemme suivant

Lemme 2.2. *Soit $\rho \in]0,\rho_0]$. Pour $y, x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$\varphi_y(x) = \chi_0\left((x-y)^2\lambda(y)^{-1}\rho^{-2}\right)\Theta_\rho(x)^{-1}. \tag{2.8}$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int \varphi_y(x)\lambda(y)^{-1/2}dy = 1, \qquad \forall l \in \mathbb{N}, |\varphi_y^{(l)}(x)| \le C(l,\chi_0,\rho)\lambda(y)^{-l/2}. \tag{2.9}$$

Nous pouvons maintenant calculer pour $k \ge 3$, K intervalle compact de $\mathbb{R}$, $\rho \in]0,\rho_0]$ et $M > 0$,

$$\begin{aligned} E(M,a,K) &= M^{\frac{k}{k-2}}\text{mesure}\{x \in K, |k\nabla(a^{\frac{1}{k}})(x)| > M\} \\ &= M^{\frac{k}{k-2}}\int_K \mathbf{1}\left(|a'(x)|a(x)^{-\frac{k-1}{k}} > M\right)dx \\ &= M^{\frac{k}{k-2}}\iint \mathbf{1}\left(|a'(x)|a(x)^{-\frac{k-1}{k}} > M\right)\varphi_y(x)\lambda(y)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_K(x)dxdy. \end{aligned}$$

[2]En particulier, la partition continue donnée ici permet de changer *ad libitum* le rayon ρ, ce qui ne peut se faire dans le cas discret qu'en changeant également les centres des boules.

Le support de la fonction φ_y est $[y-\rho\lambda(y)^{1/2}, y+\rho\lambda(y)^{1/2}]$ et on a par conséquent, en remarquant que (2.6) et (2.8) impliquent $0 \leq \varphi_y(x) \leq \rho^{-1}C_0$,

$$E(M,a,K) \leq$$
$$C_0 M^{\frac{k}{k-2}} \iint_{-1}^{1} \mathbf{1}\left(|a'(y+\rho t\lambda(y)^{\frac12})|a(y+\rho t\lambda(y)^{\frac12})^{-\frac{k-1}{k}} > M\right)\mathbf{1}_K(y+\rho t\lambda(y)^{1/2})dtdy.$$

En posant, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$b_y(t) = \lambda(y)^{-\frac{k}{2}}\rho^{-k}a(y+\rho t\lambda(y)^{\frac12}), \quad b_y^{(j)}(t) = \partial_t^j b_y(t), \tag{2.10}$$

on trouve d'après (2.1–2) et le lemme 2.2, pour $\rho \in]0,\rho_0/2]$, les estimations

$$\forall t \in [-2,+2], \quad C_1^{-1} \leq \sum_{0\leq j\leq k-1} \rho^{k-j}|b^{(j)}(t)| \leq C_1, \tag{2.11}$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ b(t) \geq 0, \quad \|b^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \gamma, \tag{2.12}$$

où la constante $C_1 > 0$ ne dépend que de k. Notons en particulier qu'il existe $j_0 \in \{0,\dots,k-1\}$ tel que $|b^{(j_0)}(0)|\rho^{k-j_0} \geq (kC_1)^{-1}$. Par suite, pour $|t| \leq 2$, on a, si $j_0 < k-1$,

$$|b^{(j_0)}(t)|\rho^{k-j_0} \geq \frac{1}{kC_1} - 2\rho^{k-j_0}C_1\rho^{-k+j_0+1} \geq \frac{1}{2kC_1} > 0, \quad \text{si } \rho \leq \frac{1}{4kC_1^2}. \tag{2.13}$$

Si $j_0 = k-1$, on a

$$|b^{(j_0)}(t)|\rho^{k-j_0} \geq \frac{1}{kC_1} - 2\rho^{k-j_0}\gamma \geq \frac{1}{2kC_1} > 0, \quad \text{si } \rho \leq \frac{1}{4kC_1\gamma}. \tag{2.13'}$$

Il vient par conséquent

$$E(M,a,K) \leq C_0 M^{\frac{k}{k-2}} \iint_{-1}^{1} \mathbf{1}\left(|b'(t)|b(t)^{-\frac{k-1}{k}} > M\right) dt\mathbf{1}(|y-K|_y \leq \rho)dy, \tag{2.14}$$

où l'on a posé

$$|y-K|_y = \inf_{x\in K} |y-x|\lambda(y)^{-1/2}. \tag{2.15}$$

Nous allons maintenant utiliser la proposition suivante, dont la démonstration est donnée au paragraphe 4.

Proposition 2.3. *Soit k un entier ≥ 2 et $0 < \omega_0 < \omega_1$ des constantes strictement positives. Il existe une constante $C(k, \omega_0, \omega_1)$ (ne dépendant que de k, ω_0, ω_1) telle que la propriété suivante soit vérifiée. Soit b une fonction $\in C^0([-2, 2]; \mathbb{R}_+)$, telle qu'il existe un entier $j_0 \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que b soit $j_0 + 1$ fois différentiable et vérifie*

$$\forall t \in [-2, 2], \quad \omega_0 \leq |b^{(j_0)}(t)| \leq \sum_{0 \leq j \leq j_0+1} |b^{(j)}(t)| \leq \omega_1. \tag{2.16}$$

Alors la dérivée de $b^{1/k}$ appartient à $L_w^{\frac{k}{k-2}}([-1, 1])$ et

$$\|b' b^{-\frac{k-1}{k}}\|_{L_w^{\frac{k}{k-2}}([-1,1])} \leq C(k, \omega_0, \omega_1). \tag{2.17}$$

En admettant provisoirement cette proposition, il vient de (2.11—14), pour[3]

$$0 < \rho \leq \min\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{1}{4kC_1(k, C_0)^2}, \frac{1}{4kC_1(k, C_0)\gamma}\right) = \rho_1(k, \gamma) \tag{2.18}$$

l'estimation

$$E(M, a, K) \leq C_0 C_2(k, \rho, \gamma) \int \mathbf{1}(|y - K|_y \leq \rho) dy. \tag{2.19}$$

Or si $|y - K|_y \leq \rho$, il existe $x_0 \in K$ tel que $|y - x_0| \leq \rho\lambda(y)^{1/2}$ et par suite $|y - x_0| \leq C_0^{1/2} \rho \lambda(x_0)^{1/2}$ ce qui implique que

$$y \in K + \rho C_0^{1/2} \sup_{x \in K} \lambda(x)^{1/2}.$$

On peut remarquer que

$$\sup_{x \in K} \lambda(x)^{1/2} = \lambda_K^{1/2} \leq k^{1/2k} \max_{0 \leq j \leq k-1} \|a^{(j)}\|_{L^\infty(K)}^{1/(k-j)} = N_{k-1,K}(a). \tag{2.20}$$

On obtient finalement pour $a \in C^k(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+^*)$ et $0 < \rho \leq \rho_1(k, \gamma)$,

$$\begin{aligned} \sup_{M>0} M^{\frac{k}{k-2}} m \Big(\{x \in K, |a'(x)| a(x)^{-1+\frac{1}{k}} > M\}\Big) \\ \leq \Big(|K| + \rho N_{k-1,K}(a)\Big) C_3(k, \rho, \|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Notons que (2.21) et les conditions (2.13), (2.13)', (2.18) sur ρ impliquent qu'il existe une constante $\beta(k, K)$ telle que, si $\|a\|_{C^k(\mathbb{R})} \leq 1$, alors

$$\|(a^{1/k})'\|_{L_w^{\frac{k}{k-2}}(K)} \leq \beta(k, K). \tag{2.22}$$

[3]Si $k = 2$, on utilise (2.11—13) et l'identité $a'(y + \rho\lambda(y)^{1/2}t) a(y + \rho\lambda(y)^{1/2}t)^{-1/2} = b'(t) b(t)^{-1/2}$. Le reste de la preuve est identique. Malgré tout, notre démonstration ne fournit pas la meilleure constante dans l'inégalité classique (1.1). On peut également remarquer que (1.1) est vraie en remplaçant $f(x)$ par $|f(x)|$, l'hypothèse de positivité de f par

$$f(x) = 0 \text{ implique } f'(x) = 0, \tag{$*$}$$

et en supposant f deux fois différentiable. Il est aussi possible de démontrer cette inégalité, toutefois sans la meilleure constante 2 (atteinte pour x^2), sous les hypothèses f de classe C^1, $(*)$ et $f'' \in L^\infty$.

3. Fonctions positives ou nulles

Soient k un entier ≥ 2 et g une fonction k fois différentiable, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ telle que la dérivée $k-$ième $g^{(k)}$ appartienne à $L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$a_n(x) = g(x) + \frac{1}{n}. \tag{3.1}$$

Pour K intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $M > 0$, on a

$$\{x \in K, |g'(x)| > Mg(x)^{1-\frac{1}{k}}\} = \cup_{n\geq 1}\{x \in K, |a_n'(x)| > Ma_n(x)^{1-\frac{1}{k}}\}, \tag{3.2}$$

la réunion étant croissante. Le théorème de Beppo Levi implique par conséquent

$$m\left(\{x \in K, |g'(x)| > Mg(x)^{1-\frac{1}{k}}\}\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in K, |a_n'(x)| > Ma_n(x)^{1-\frac{1}{k}}\}\right). \tag{3.3}$$

De (2.20–21) appliqué à a_n et de (3.3), il vient, pour $0 < \rho \leq \rho_1(k, \|g^{(k)}\|)$,

$$\begin{aligned} \sup_{M>0} M^{\frac{k}{k-2}} m\left(\{x \in K, |g'(x)| > Mg(x)^{1-\frac{1}{k}}\}\right) \\ \leq \Big(|K| + \rho N_{k-1,K}(g)\Big) C_3(k, \rho, \|g^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme $g(x) = 0$ implique $g'(x) = 0$, on trouve que la distribution $k(g^{1/k})'$ est la limite faible de $g'(g + n^{-1})^{\frac{1}{k}-1}\mathbf{1}_{g>0}$. Or, d'après (3.4), $|g'|g^{\frac{1}{k}-1}\mathbf{1}_{g>0}$ appartient à $L_w^{k/k-2}(K) \subset L^1(K)$ et domine $g'(g + n^{-1})^{\frac{1}{k}-1}\mathbf{1}_{g>0}$. Ceci implique que

$$k(g^{1/k})' = g' g^{\frac{1}{k}-1}\mathbf{1}_{g>0} \in L_w^{k/k-2}(K)$$

et que

$$\begin{aligned} \sup_{M>0} M^{\frac{k}{k-2}} m\left(\{x \in K, |k(g^{1/k})'(x)| > M\}\right) \\ \leq \Big(|K| + \rho N_{k-1,K}(g)\Big) C_3(k, \rho, \|g^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Soit maintenant $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction k fois différentiable où Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si K est un intervalle compact $\subset \Omega$ et $\chi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}_+)$ est égale à 1 sur K, on applique l'inégalité (3.5) à χf_1 et on obtient

$$\|f_1\|_{L_w^{\frac{k}{k-2}}(K)} \leq \beta(k, K, \chi, \|f_1\|_{C^k(\operatorname{supp}\chi)}). \tag{3.6}$$

Soit finalement $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction k fois différentiable où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si K est compact $\subset \Omega$ et $K+\epsilon = \cup_{x\in K} B(x,\epsilon) \subset \Omega$ pour un $\epsilon > 0$, il existe $\chi \in C_c(K+\epsilon, \mathbb{R}_+)$ égale à 1 sur un voisinage de K, de sorte que $F = \chi f \in C_c(K+\epsilon, \mathbb{R}_+)$. On trouve en appliquant (3.6) à $f_1(x_1) = F(x_1, x')$ que

$$\partial_{x_1}(F^{1/k})(x_1, x') \in L^\infty_{x'}(L_w^{k/k-2}(\mathbb{R}))$$

et l'estimation (1.3) grâce à (3.6), car si L est un voisinage compact de K dans Ω, on a démontré que

$$\sup_{f\in C^k(L), \|f\|_{C^k(L)}\le 1} \|\nabla(f^{\frac{1}{k}})\|_{L_w^{\frac{k}{k-2}}(K)} \le \alpha(k,K,L) < +\infty.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.1.

4. Formes normales: preuve de la proposition 2.3

Dans cette section, nous démontrons la proposition 2.3. Notons que les hypothèses de cette proposition assurent que la fonction b est proche d'un polynôme normalisé de degré $\le k-1$. Si b vérifie les hypothèses de la proposition 2.3 et s'annule en un point $t_0 \in [-1,1]$, on a

$$0 = b(t_0) = b'(t_0) = \cdots = b^{(2l-1)}(t_0), \quad b^{(2l)}(t_0) > 0, \quad \text{avec } 2 \le 2l \le j_0.$$

Il suffit alors de remarquer que $b(t) = e(t)(t-t_0)^{2l}$ avec $e > 0$ au voisinage de t_0 et différentiable. Comme la dérivée de $(t-t_0)^{2l/k}$ est majorée au voisinage de t_0 par

$$|t-t_0|^{\frac{2l-k}{k}} \le |t-t_0|^{\frac{2-k}{k}} \in L_w^{\frac{k}{k-2}},$$

on obtient le premier résultat, évident si b ne s'annule pas. Le plus important est de démontrer l'estimation (2.17). Supposons tout d'abord que la fonction b atteigne son minimum en un point t_0 intérieur à $[-2,2]$. Alors $b'(t_0) = 0$ ce qui implique $j_0 \ne 1$ et, comme $b(t) \ge b(t_0)$ sur $[-2,2]$,

$$b(t) = \underbrace{b(t_0)}_{\beta_0\ge 0} + \underbrace{\int_0^1 (1-\theta)b''(t_0+\theta(t-t_0))d\theta}_{B(t)\ge 0 \text{ pour } |t|\le 2} \underbrace{(t-t_0)^2}_{T^2}.$$

On peut supposer $j_0 \ge 2$, sinon $j_0 = 0$ et la proposition est évidente. La fonction B ci-dessus vérifie les hypothèses de la proposition 2.3 avec $j_0 - 2$ remplaçant j_0. On remarque que,

$$b^{\frac{1}{k}-1}b' = k\frac{d}{dt}(\beta_0 + BT^2)^{\frac{1}{k}} = (\beta_0 + BT^2)^{\frac{1}{k}-1}(B'T^2 + 2BT),$$

ce qui donne

$$|b^{\frac{1}{k}-1}b'| \leq (BT^2)^{\frac{1}{k}-1}|B'T^2+2BT| \leq |B'|B^{\frac{1}{k}-1}T^{\frac{2}{k}} + 2 \underbrace{T^{\frac{2}{k}-1}}_{\in L_w^{\frac{k}{k-2}}(\mathbb{R})} B^{\frac{1}{k}}.$$

En utilisant une récurrence sur j_0, on trouve que $|B'|B^{\frac{1}{k}-1}$ est dans $L_w^{\frac{k}{k-2}}([-1,1])$ avec une norme contrôlée par ω_0, ω_1. Examinons maintenant le cas où b atteint son minimum en ± 2, par exemple en -2. Si $b'(-2)=0$, la preuve précédente donne le résultat. Sinon, on aura $b'(-2)>0$ et

$$b(t) = \underbrace{b(-2)}_{\beta_0 \geq 0} + \underbrace{\int_0^1 b'(-2+\theta(t+2))d\theta}_{B(t)\geq 0 \text{ pour } |t|\leq 2} \underbrace{(t+2)}_{T}.$$

On peut supposer $j_0 \geq 1$, sinon $j_0 = 0$ et la proposition est évidente. La fonction B ci-dessus vérifie les hypothèses de la proposition 2.3 avec $j_0 - 1$. On remarque que,

$$b^{\frac{1}{k}-1}b' = k\frac{d}{dt}(\beta_0 + BT)^{\frac{1}{k}} = (\beta_0+BT)^{\frac{1}{k}-1}(B'T+B),$$

ce qui donne

$$|b^{\frac{1}{k}-1}b'| \leq (BT)^{\frac{1}{k}-1}|B'T+B| \leq |B'|B^{\frac{1}{k}-1}T^{\frac{1}{k}} + \underbrace{T^{\frac{1}{k}-1}}_{\in L^\infty([-1,1])} B^{\frac{1}{k}}.$$

On peut remarquer ici que $T^{\frac{1}{k}-1}$ n'appartient pas à $L_w^{\frac{k}{k-2}}([-2,2])$ mais seulement à $L^\infty([-1,1])$. En utilisant une récurrence sur j_0, on trouve que

$$|B'|B^{\frac{1}{k}-1} \in L_w^{\frac{k}{k-2}}([-1,1])$$

avec une norme contrôlée par ω_0, ω_1. Ceci achève la preuve de la proposition 2.3.

Remarque. Comme dans [T], on pourrait se poser la question de la régularité de la racine $k-$ième de la valeur absolue d'une fonction f de classe C^k. Un corollaire immédiat du théorème 1.1 est que $\nabla(|f|^{1/k}) \in L_w^{k/k-1}$(localement) pourvu que f soit dans C^{2k}. En fait, il est plausible que seule l'hypothèse $f \in C^k$ soit nécessaire pour obtenir ce résultat. Néanmoins, la démonstration de ceci nécessiterait une modification non immédiate de la proposition 2.3, et nous n'avons pas souhaité poursuivre dans cette direction.

5. Preuve du théorème 1.2

Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire, 1-périodique, croissante sur $[0,1/2]$ telle que

$$\alpha(0)=1, \quad \alpha(1/2)=2, \quad \forall j\ge 1,\ \alpha^{(j)}(0)=0.$$

Soit $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $\beta' \le 0$ et $\beta(\tau)=1$ pour $\tau\le 0$, $\beta(\tau)=0$ pour $\tau \ge 1$. Soit n_0 un entier naturel tel que $\sum_{j\ge 1}(j+n_0)^{-2} < 1/3$. On pose, pour $n\ge 1$ entier

$$\rho_n = (n+n_0)^{-2}, \quad \nu_n = 2^n, \quad \delta_n = n2^{-nk}, \tag{5.1}$$

$$t'_1 = 0, t'_n = 3\sum_{1\le j<n}\rho_j, \quad t_n = t'_n+\rho_n, \quad t''_n = t'_n + 2\rho_n, \quad T = t'_\infty = 3\sum_{j\ge 1}\rho_j, \tag{5.2}$$

$$I_n = [t'_n, t''_n], \quad J_n = [t''_n, t'_{n+1}]. \tag{5.3}$$

On peut alors définir la fonction f cherchée en posant

$$f(t) = \begin{cases} \delta_n\alpha(\nu_n(t-t_n)\rho_n^{-1}) & \text{pour } t\in I_n,\\ \delta_{n+1} + (\delta_n-\delta_{n+1})\beta((t-t''_n)\rho_n^{-1}) & \text{pour } t \in J_n,\\ (t-T)^{2k} & \text{pour } t\in[T,1]. \end{cases} \tag{5.4}$$

On voit immédiatement que f est strictement positive et C^∞ sur $[0,1]\backslash\{T\}$. De plus pour $l\ge 0$ entier, on a

$$|f^{(l)}(t)| \le \begin{cases} \delta_n\nu_n^l\rho_n^{-l}\|\alpha^{(l)}\|_{L^\infty} & \text{dans } I_n,\\ \delta_n\rho_n^{-l}\|\beta^{(l)}\|_{L^\infty} & \text{dans } J_n. \end{cases} \tag{5.5}$$

On déduit du choix de (5.1) que, pour $0\le l<k$, $\lim_{t\to T}|f^{(l)}(t)|=0$ et $f\in C^{k-1}([0,1])$. On peut même démontrer que, pour tout $\theta<1$, $f\in C^{k-1,\theta}([0,1])$. Posons

$$F(t',t'') = |f^{(k-1)}(t'') - f^{(k-1)}(t')||t'-t''|^{-\theta}. \tag{5.6}$$

Par conséquent,

∗ si $t', t'' \in I_n$ et $|t'-t''|\le \rho_n\nu_n^{-1}$, on a

$$F(t',t'') \le C\delta_n\nu_n^k\rho_n^{-k}|t'-t''|^{1-\theta} \le C\delta_n\nu_n^{k-1+\theta}\rho_n^{-k+1-\theta} \to 0 \quad \text{pour } n\to+\infty. \tag{5.7}$$

et donc est une suite bornée.

∗ Si $t',t''\in I_n$ et $|t'-t''| > \rho_n\nu_n^{-1}$, on a comme en (5.7)

$$F(t',t'') \le C\delta_n\nu_n^{k-1}\rho_n^{-k+1}|t''-t'|^{-\theta} \le C\delta_n\nu_n^{k-1+\theta}\rho_n^{-k+1-\theta}. \tag{5.8}$$

$*$ Si $t', t'' \in J_n$ on a

$$(5.9) \qquad F(t',t'') \le C\delta_n \rho_n^{-k} |t''-t'|^{1-\theta} \le C\delta_n \rho_n^{-k+1-\theta} \to 0 \quad \text{pour } n \to +\infty.$$

$*$ Si $t' < t''$ et $t' \in I_n \cup J_n$, $t'' \in I_m \cup J_m$, $n \le m$, de sorte que si $n = m$, t' et t'' ne sont pas dans le même intervalle (cas déjà envisagés), on obtient, en notant $\bar{t'}, \bar{t''}$ respectivement le supremum et l'infimum des intervalles auxquels t', t'' appartiennent,

$$|t'-t''|^\theta F(t',t'') \le |f^{(k-1)}(t') - f^{(k-1)}(\bar{t'})| + |f^{(k-1)}(\bar{t'}) - f^{(k-1)}(\bar{t''})| + |f^{(k-1)}(\bar{t''}) - f^{(k-1)}(t'')|.$$

Ceci donne, en remarquant que $f^{(k-1)}(\bar{t'}) = f^{(k-1)}(\bar{t''}) = 0$, en utilisant les majorations (5.7–9) et $t' \le \bar{t'} \le \bar{t''} \le t''$

$$(5.10) \qquad F(t',t'') \le C|t'-t''|^{-\theta}(|t'-\bar{t'}|^\theta + |t''-\bar{t''}|^\theta) \le 2^{1-\theta}C.$$

$*$ Il reste à examiner les cas où l'un au moins des points t', t'' est $\ge T$. Si $T \le t' < t''$, le résultat est trivial en utilisant (5.4). Si $t' < T \le t''$, on note que

$$f^{(k-1)}(t'') - f^{(k-1)}(t') = \underbrace{f^{(k-1)}(t'') - f^{(k-1)}(T)}_{\le C|t''-T|} + \lim_{s \uparrow T} f^{(k-1)}(s) - f^{(k-1)}(t')$$

et le résultat $f \in C^{k-1,\theta}$ vient des majorations précédentes.

Démontrons maintenant que $f^{1/k} \notin W^{1,1}$. On calcule, en utilisant la 1-périodicité de la fonction α,

$$\int_{I_n} |f' f^{\frac{1-k}{k}}| dt = \int_{I_n} \delta_n^{\frac{1}{k}} |\alpha'(\nu_n(t-t_n)\rho_n^{-1})| \nu_n \rho_n^{-1} \alpha(\nu_n(t-t_n)\rho_n^{-1})^{\frac{1-k}{k}} dt$$
$$= \delta_n^{\frac{1}{k}} \int_{-\nu_n}^{\nu_n} |\alpha'(\tau)| \alpha(\tau)^{\frac{1-k}{k}} d\tau = \delta_n^{\frac{1}{k}} 2\nu_n \int_0^1 |\alpha'(\tau)| \alpha(\tau)^{\frac{1-k}{k}} d\tau = n^{\frac{1}{k}} 2^2 k (2^{\frac{1}{k}} - 1) \to +\infty.$$

Remarque. Une modification mineure de la preuve précédente permet de démontrer que l'on peut trouver une fonction f vérifiant $f^{1/k} \notin W^{1,1}$ avec f encore plus proche de $C^{k-1,1}$. Plus précisément, on considère une fonction positive strictement décroissante définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\tau \mapsto \tau\omega(\tau)$ soit croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie

$$(5.11) \qquad \lim_{\tau \to 0} \omega(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \to 0} \tau\omega(\tau) = 0, \quad (\text{e.g. } \omega(\tau) = \ln \frac{1}{\tau}).$$

On dira alors que $g \in \Lambda^{0,\omega}$ si $g(\sigma+\tau) - g(\sigma) = O(\tau\omega(|\tau|))$. Notons que la première condition de (5.11) assure $Lip = C^{0,1} \subset \Lambda^{0,\omega}$ tandis que la seconde est naturelle pour un module de continuité. On peut choisir f dans le théorème 1.2 dans l'espace $\Lambda^{k-1,\omega}$ (i.e. $f^{(k-1)} \in \Lambda^{0,\omega}$) avec ω comme ci-dessus, ce qui améliore le résultat, car pour l'exemple donné en (5.11), on a les inclusions strictes

$$C^{k-1,1} \subset \Lambda^{k-1,\omega} \subset \ \cap_{\theta<1} C^{k-1,\theta}.$$

En fait, la démonstration de ce résultat est identique à la preuve précédente, au choix près de ν_n, δ_n: si σ désigne la fonction réciproque de ω, on prend

$$\nu_n = 1 + \left[\frac{\rho_n}{\sigma(n\rho_n^{-k})}\right], \quad \delta_n = \nu_n^{-k}\rho_n^k \omega(\rho_n \nu_n^{-1}), \tag{5.12}$$

où $[\cdot]$ est la partie entière. Nous laissons cette généralisation au lecteur.

6. Preuve du théorème 1.3

Pour étudier le problème (1.4), on suit la méthode de [CJS] et on observe que, grâce à la vitesse finie de propagation, on peut se ramener au cas de données de Cauchy à support compact. On introduit, comme dans [CJS], pour $\epsilon > 0$, l'énergie approchée

$$E_\epsilon(t,\xi) = \big(a(t,\xi) + \epsilon|\xi|^2\big)|v(t,\xi)|^2 + |\dot v(t,\xi)|^2, \tag{6.1}$$

où $v(t,\xi) = \mathrm{Fourier}_x u(t,\cdot)$ et $\dot v = dv/dt$. On obtient aisément l'estimation

$$E_\epsilon(T,\xi) \le E_\epsilon(0,\xi) \exp\left\{\int_0^T \frac{|\dot a(t,\xi)|}{a(t,\xi)+\epsilon|\xi|^2} dt + \epsilon^{\frac12} T|\xi|\right\}. \tag{6.2}$$

On utilise maintenant le fait, dû au théorème 1.1, que $(a^{\frac1k})' \in L^q$ pour $q < \frac{k}{k-2}$ et l'on suppose $u_0, u_1 \in \mathcal{D} \cap G^s$. On a, en posant $\widetilde a(t,\xi) = |\xi|^{-2} a(t,\xi)$,

$$\frac{|\dot a(t,\xi)|}{a(t,\xi)+\epsilon|\xi|^2} \le \frac{|\dot a(t,\xi)|}{a(t,\xi)^{1-\frac1k}} (\epsilon|\xi|^2)^{-\frac1k} = k\epsilon^{-\frac1k}\left|\frac{d}{dt}(\widetilde a^{\frac1k})\right|$$

et par conséquent, avec la notation (1.3), pour tout $\theta > 0$, $\frac1q + \frac1{q'} = 1, q < \frac{k}{k-2}$ (et donc $1/q' \le 2/k$)

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{|\dot a(t,\xi)|}{a(t,\xi)+\epsilon|\xi|^2} dt &\le k\epsilon^{-\frac1k}\left\|\frac{d}{dt}(\widetilde a^{\frac1k})\right\|_{L^q([0,T])} T^{\frac1{q'}} \\ &\le k\epsilon^{-\frac1k} T^{\frac1{q'}} \alpha(k,[0,T],[-\theta,T+\theta]) \left\|\widetilde a\right\|^{1/k}_{C^k([-\theta,T+\theta])}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

On choisit alors $\epsilon = |\xi|^{-\frac{2k}{k+2}}$ et il vient de (6.2–3), avec A_0 ne dépendant que de u_0, u_1 et C_0 de $\|\widetilde{a}(0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}$ (si $\epsilon \le 1$),

$$\begin{aligned}(6.4)\quad & E_\epsilon(T,\xi) \\ &\le E_\epsilon(0,\xi)\exp\left\{k|\xi|^{\frac{2}{k+2}}T^{\frac{1}{q'}}\alpha(k,[0,T],[-\theta,T+\theta])\,\|\widetilde{a}\|^{1/k}_{C^k([-\theta,T+\theta])} + |\xi|^{-\frac{k}{k+2}}T|\xi|\right\} \\ &\le C_0(|\xi|^2+1)\exp\left\{|\xi|^{\frac{2}{k+2}}\left[-A_0 + kT^{\frac{1}{q'}}\alpha(k,[0,T],[-\theta,T+\theta])\,\|\widetilde{a}\|^{1/k}_{C^k([-\theta,T+\theta])} + T\right]\right\},\end{aligned}$$

ce qui donne en supposant a priori que $T < A_0$,

$$\begin{aligned}(6.5)\quad & E_\epsilon(T,\xi) \\ &\le C_0(|\xi|^2+1) \\ &\quad\times \exp\left\{|\xi|^{\frac{2}{k+2}}\left[-A_0 + kT^{\frac{1}{q'}}\alpha(k,[0,A_0],[-A_0,2A_0])\,\|\widetilde{a}\|^{1/k}_{C^k([-A_0,2A_0])} + T\right]\right\}.\end{aligned}$$

En posant

$$(6.6)\qquad B_0 = k\alpha(k,[0,A_0],[-A_0,2A_0])\,\|\widetilde{a}\|^{1/k}_{C^k([-A_0,2A_0])},$$

qui ne dépend que de u_0, u_1 et des valeurs de a sur $[-A_0, 2A_0]\times\mathbb{R}^d$, on trouve la condition

$$B_0 T^{\frac{2}{k}} + T < A_0$$

vérifiée par exemple pour

$$T < \min\left(\frac{A_0}{B_0+1}, \left(\frac{A_0}{B_0+1}\right)^{k/2}\right).$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.3.

References

[BF] R.Beals & C.Fefferman, *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. **97** (1973), 482–498.

[Bo] J.-M.Bony, *Sur l'inégalité de Fefferman-Phong*, Séminaire EDP, Ecole Polytechnique (1998-1999), Exposé III.

[BL] J.-M.Bony & N.Lerner, *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.(4) **22** (1989), 3, 377–433.

[CJS] F.Colombini, E.Jannelli & S.Spagnolo, *Well-posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a nonstrictly hyperbolic equation with coefficients depending on time*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **10** (1983), no.2, 291–312.

[D] J.Dieudonné, *Sur un théorème de Glaeser*, J. Analyse Math. **23** (1970), 85–88.

[FP] C.Fefferman & D.H.Phong, *On positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **75** (1978), no.10, 4673–4674.

[G] G.Glaeser, *Racine carrée d'une fonction différentiable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **13** (1963), fasc.2, 203–210.

[Gu] P.Guan, C^2 *a priori estimates for degenerate Monge-Ampère equations*, Duke Math.J. **86** (1997), no. 2, 323–346.

[H] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential operators*, Grund. der math. Wiss. 256, 257; 274, 275, Springer-Verlag, 1983; 1985.

[K1] K.Kajitani, *Well-posedness in Gevrey class of the Cauchy problem for hyperbolic operators*, Bull.Sci.Math. **111** (1987), 415–438.

[K2] K.Kajitani, *Cauchy problem for non strictly hyperbolic systems in Gevrey classes*, J.Math.Kyoto Univ. **23** (1983), 599–616.

[M] R.Macchia, *On roots of differentiable functions*, J.Math.Anal.Appl. **63** (1978), 112-140.

[N] T.Nishitani, *Sur les équations hyperboliques à coefficients höldériens en t et de classe de Gevrey en x*, Bull.Sci.Math. **107** (1983), 291–312.

[OT1] Y.Ohya & S.Tarama, *Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples dans la classe de Gevrey – coefficients höldériens en t*, Proc. Taniguchi Intern. Symp. on Hyperbolic Equations and Related Topics (1984), 273–302.

[OT2] ———, *Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples dans la classe de Gevrey, II*, Proc. Conference on Hyperbolic Equations and Related Topics, Padova (1985), Longman.

[R] K.Reichard, *Roots of differentiable functions of one real variable*, J.Math.Anal.Appl. **74** (1980), 441–445.

[T] S.Tarama, *On the lemma of Colombini, Jannelli and Spagnolo*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Osaka City University **41** (2000), 111–115.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F.Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italia
E-mail address: `colombin@dm.unipi.it`

Université de Rennes 1, Irmar, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
E-mail address: `lerner@univ-rennes1.fr`
Web-page: `http://www.maths.univ-rennes1.fr/lerner`